Buku Analisis Numerik

by Edy Suprapto

ANALISIS NUMERIK

BERBASIS GROUP INVESTIGATION UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN BERPIKIR KRITIS

Swasti Maharani
Edy Suprapto

ANALISIS NUMERIK

BERBASIS GROUP INVESTIGATION UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN BERPIKIR KRITIS

Swasti Maharani
Edy Suprapto

CV. AE MEDIA GRAFIKA

ANALISIS NUMERIK

**BERBASIS GROUP INVESTIGATION
UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN
BERPIKIR KRITIS**

ISBN: 978-602-6637-07-9

Cetakan ke-1, Agustus 2018

Penulis

Swasti Maharani
Edy Suprapto

Penerbit

CV. AE MEDIA GRAFIKA
Jl. Raya Solo Maospati, Magetan, Jawa Timur 63392
Telp. 082336759777
email: aemediagrafika@gmail.com
www.aemediagrafika.com

Anggota IKAPI Nomor : 208/JTI/2018

Kata Pengantar

Puji syukur kehadirat Allah SWT, atas terselesaikannya penyusunan buku *Analisis Numerik Berbasis Group Investigation Untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kritis*.

Kehadiran buku ini akan melengkapi pengetahuan pembaca tentang metode numerik yang merupakan alat bantu pemecahan permasalahan matematika yang sangat ampuh. Metode numerik mampu menangani sistem persamaan besar, ketidaklinieran, dan geometri yang rumit yang dalam praktek rekayasa seringkali tidak mungkin dipecahkan secara analitik. Selain itu, metode numerik menyediakan sarana untuk memperkuat kembali pemahaman matematika. Buku ini selain menjabarkan pengetahuan tentang numerik, juga dilengkapi dengan lembar gorup investigasi yang diranang untuk meningkatkan kemampuan berpikir kritis.

Terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu terselesaikannya penyusunan buku ini. Penulis juga mohon maaf apabila dalam buku ini masih terdapat kekurangan, baik dari tampilan maupun isi. Semoga buku ini berguna bagi kita semua.

Madiun, Agustus 2018
Penyusun

Daftar Isi

Bab I
Kekeliruan dalam Perhitungan Numerik

A. Metode Numerik Secara Umum

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan, seperti bidang fisika, kimia, ekonomi, atau pada persoalan rekayasa (*engineering*). Seringkali model matematika tersebut muncul dalam bentuk yang rumit yang tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik yang sudah umum untuk mendapatkan solusi sejati (*exact solution*). Metode analitik adalah metode penyelesaian model matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku (lazim). Sedangkan metode numerik merupakan suatu metode untuk menyelesaikan masalah-masalah matematika dengan menggunakan sekumpulan aritmatik sederhana dan operasi logika pada sekumpulan bilangan atau data numerik yang diberikan. Kapan metode numerik ini digunakan? Bila metode analitik sudah tidak dapat lagi diterapkan, maka solusi persoalan sebenarnya masih dapat dicari dengan menggunakan metode numerik. Perbedaan utama antara metode numerik dan metode analitik terletak pada dua hal. Pertama, solusi dengan menggunakan metode numerik selalu berbentuk angka. Bandingkan dengan metode analitik yang biasanya menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematik yang selanjutnya fungsi matematik tersebut dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka. Kedua, dengan metode numerik, kita hanya memperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga solusi dari hasil penghitungan numerik disebut solusi hampiran (*approximation*) dan dapat dibuat seteliti yang kita inginkan. Solusi hampiran jelas tidak tepat sama dengan solusi sejati, sehingga ada selisih diantara keduanya yang disebut dengan galat (*error*).

Metode komputasi yang digunakan dalam penghitungan numerik disebut **algoritma**. Proses penyelesaiannya mungkin memerlukan puluhan bahkan sampai jutaan operasi, tergantung pada kompleksitas masalah yang harus diselesaikan, tingkat keakuratan yang diinginkan dan seterusnya. Menurut Olver (2008) "*The main goal of numerical analysis is to develop encient algorithms for computing precise numerical values of mathematical quantities, including functions, integrals, solutions of algebraic equations, solutions of diferential equations (both ordinary and partial), solutions of minimization problems, and so on*". Tujuan utama analisis numerik adalah untuk mengembangkan algoritma yang efisien untuk mengkomputasi nilai numerik yang tepat dari jumlah matematis, termasuk fungsi, integral, solusi persamaan aljabar, solusi persamaan diferensial (biasa dan parsial), solusi masalah minimisasi, dan sebagainya.

Mengapa kita perlu mempelajari metode numerik? Beberapa alasannya adalah metode numerik merupakan alat bantu pemecahan permasalahan matematika yang sangat ampuh. Metode numerik mampu menangani sistem persamaan besar, ketidaklinieran, dan geometri yang rumit yang dalam praktek rekayasa seringkali tidak mungkin dipecahkan secara analitik. Selain itu, metode numerik menyediakan sarana untuk memperkuat kembali pemahaman matematika. Karena, metode numerik ditemukan dengan menyederhanakan matematika yang lebih tinggi menjadi operasi matematika yang mendasar. Pendekatan yang digunakan dalam metode numerik merupakan pendekatan analitis matematis. Sehingga dasar pemikirannya tidak keluar dari dasar pemikiran analitis, hanya saja teknik perhitungan yang mudah merupakan pertimbangan dalam pemakaian metode numerik. Mengingat bahwa algoritma yang dikembangkan dalam metode numerik adalah algoritma pendekatan maka dalam algoritma tersebut akan muncul istilah iterasi yaitu pengulangan proses perhitungan. Dengan kata lain perhitungan dengan metode numerik adalah perhitungan yang dilakukan secara berulang-ulang untuk terus-menerus memperoleh hasil yang semakin mendekati nilai penyelesaian yang sebenarnya.

Dengan menggunakan metode pendekatan semacam ini, tentunya setiap nilai hasil perhitungan akan mempunyai **galat (error)** atau nilai kesalahan. Kesalahan ini penting artinya, karena kesalahan dalam pemakaian algoritma pendekatan akan menyebabkan nilai kesalahan yang besar, tentunya ini tidak diharapkan. Sehingga pendekatan metode numerik selalu membahas tingkat kesalahan dan tingkat kecepatan proses yang akan terjadi.

Masalah-masalah matematika yang sering kita hadapi merupakan masalah matematika yang disele-saikan dengan metode analitik atau **metode sejati**, yaitu suatu metode yang memberikan solusi sejati atau solusi yang sesungguhnya, karena memiliki galat (*error*) yang bernilai nol. Tetapi penyelesaian dengan menggunakan metode analitik hanya terbatas pada masalah tertentu saja. Bila metode analitik tidak dapat lagi diterapkan, maka solusinya masih dapat dicari yaitu dengan menggunakan metode numerik. Pada metode numerik solusinya merupakan hampiran (pendekatan) terhadap solusi sejati. Adapun tahapan-tahapan dalam memecahkan permasalahan secara numerik adalah sebagai berikut:

1. Tahap Pemodelan
   Kegiatan dalam tahap ini adalah memodelkan permasalahan/persoalan dunia nyata ke dalam persamaan matematika.
2. Tahap Penyederhanaan Model
   Model matematika pada tahap pertama mungkin terlalu kompleks, yaitu banyaknya variabel atau parameter. Semakin kompleks model matematika, akan semakin rumit pula penyelesaiannya. Mungkin bisa disederhanakan dengan cara dibuat beberapa andaian sehingga beberapa parameter dapat diabaikan.
3. Tahap Formulasi Numerik
   Memformulasikan model matematika yang telah sederhana secara numerik, yaitu penentuan metode numerik yang akan dipakai dan kemudian menyusun algoritma dari metode numerik yang dipilih.
4. Tahap Pemrograman
   Pada tahap ini kegiatan yang dilakukan adalah menerjemahkan algoritma ke dalam program komputer dengan menggunakan salah satu bahasa pemrograman yang dikuasai.

5. Tahap Operasional
   Program komputer dijalankan dengan data uji coba sebelum data sesungguhnya.
6. Tahap Evaluasi
   Interpretasi program

B. Bilangan dan Ketelitian

Pada matematika terdapat dua macam bilangan, yaitu bilangan eksak dan bilangan aproksimasi. Bilangan eksak merupakan suatu bilangan yang pasti, contohnya 1,2,3, $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi, e, \ldots$ Sedangkan bilangan aproksimasi adalah suatu bilangan yang dinyatakan dengan bilangan yang mempunyai derajat ketelitian/ pendekatan. Misalnya $\pi \approx$ 3,14159...., $e \approx 2{,}7\ldots$, $\sqrt{2} \approx 1{,}4\ldots.$ *Approximate numbers arise from measurement or calculation. We can never perform a completely accurate measurement with a ruler, tape measure or thermometer. There is always some inaccuracy involved, since we can always get a more accurate answer if we use a ruler (or other measuring device) with smaller units.*

Angka signifikan adalah angka-angka yang menyatakan suatu bilangan. *Significant digits give us an indication of the* ***accuracy*** *of a number arising from a measurement. The more significant digits in the number, the more accurate it indicates the measurement to be*. Angka yang signifikan memberi kita indikasi keakuratan angka yang timbul dari pengukuran. Angka yang lebih signifikan jumlahnya, semakin akurat pengukurannya. *For example, The measurement 26.832 cm from above is more accurate than the rounded figure 26.83 cm. This means 26.832 cm is* ***closer*** *to the actual diameter of the pipe than 26.83* *cm is (assuming the person measuring is doing a good job).* Pengukuran 26.832 cm dari atas lebih akurat dari pada gambar bulat 26,83 cm. Ini berarti 26,832 cm lebih dekat dengan diameter pipa sebenarnya dari 26,83 cm (dengan asumsi orang yang mengukurnya melakukan pekerjaan dengan baik). Angka 3,1416 (mempunyai 5 angka signifikan), 30,2013 (6 angka signifikan), 0,021 (2 angka signifikan), 10,003 (5 angka signifikan).

Aturan pembulatan untuk bilangan sampai ke-n angka signifikan, hilangkan setiap bilangan yang ada disebelah kanan angka ke-n dan bila bilangan yang dihilangkan tersebut kurang dari 5 maka angka ke-n tidak berubah, bila lebih dari 5 maka angka ke-n bertambah 1, tepat 5 maka bertambah 1 bila angka ke-n ganjil dan **tetap jika angka ke-n genap.**

Soal Investigasi 1.1

Bulatkan hingga ke-4 angka signifikan dari bilangan-bilangan berikut !

a. 1,285n16 ≈.........

b. 0,0321a72 ≈ ....

c. 3,24k531 ≈ ....

d. 6,24p56q ≈ ....

C. Deret Taylor dan Analisis Galat

Matematika adalah ilmu dasar, jadi mahasiswa diharapkan sudah memiliki pengetahuan mengenai konsep fungsi, geometri, konsep kalkulus seperti turunan dan integral dan sebagainya. Banyak teorema matematika yang dipakai dalam penghitungan numerik. Tapi teorema yang sangat penting adalah deret Taylor yang digunakan untuk menurunkan suatu metode numerik.

1. Deret Taylor

Fungsi yang bentuknya kompleks menjadi lebih sederhana bila dihampiri dengan polinom, karena polinom merupakan bentuk fungsi yang paling mudah dipahami kelakuannya. Galat pada solusi numerik harus dihubungkan dengan seberapa teliti polinom menghampiri fungsi sebenarnya. Fungsi yang digunakan untuk membuat polinom hampiran adalah deret Taylor.

<u>Definisi Deret Taylor</u>

Andai *f* dan semua turunannya *f'*, *f''*, *f'''*, ..., di dalam selang [a,b]. Misalkan $x_0 \in [a,b]$, maka nilai x di sekitar x_0 dan $x \in [a,b]$, f(x) dapat diekpansi ke dalam deret Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^m}{m!} f^m(x_0) + \ldots \quad (1.1)$$

Jika $x - x_0 = h$, maka f(x) dapat ditulis :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{h^m}{m!} f^m(x_0) + \ldots \quad (1.2)$$

<u>Contoh1:</u>

Hampiri fungsi f(x) = sin (x) ke dalam Taylor disekitar $x_0 = 1$!

Jawab :
Tentukan turunan sin (x) sebagai berikut :

$f(x) = \sin(x)$

$f'(x) = \cos(x)$

$f''(x) = -\sin(x)$

$f'''(x) = \cos(x)$

$f^{(4)}(x) = \sin(x)$, dan seterusnya, maka jika sin (x) dihampiri dengan deret Taylor:

$$\sin(x) = \sin(1) + \frac{(x-1)}{1!}\cos(1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + (-\sin(1)) + \frac{(x-1)^3}{3!}(-\cos(1)) + \frac{(x-1)^4}{4!}\sin(1) + \ldots$$

bila $x - x_0 = h$, maka:

$$\sin(x) = \sin(1) + \frac{h}{1!}\cos(1) + \frac{h^2}{2!} + (-\sin(1)) + \frac{h^3}{3!}(-\cos(1)) + \frac{h^4}{4!}\sin(1) + \ldots$$

$$= 0{,}8415 + 0{,}5403h - 0{,}4208h^2 - 0{,}0901h^3 + 0{,}0351h^4 + \ldots$$

Jika $x_0 = 0$, maka deretnya dinamakan deret MacLaurin, merupakan deret Taylor baku.

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^m}{m!}f^m(0)$$

Soal Investigasi 1.2

Uraikan masing-masing fungsi berikut ke dalam deret MacLaurin!

a. $\sin(x)$
b. e^x
c. $\cos x$
d. $\ln(x+1)$

Karena suku-suku deret Taylor tidak berhingga banyaknya, maka agar lebih praktis deret Taylor dipotong sampai suku orde tertentu, yang dinyatakan oleh:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + R_n(x) \quad (1.3)$$

Dimana $R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\,, x_0 < c < x$ (1.4)

disebut galat atau sisa (residu)

Sehingga deret Taylor yang dipotong sampai suku orde ke-n dapat ditulis:

$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, dengan:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \quad (1.5)$$

$$R_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\,,\; x_0 < c < x \quad (1.6)$$

Soal Investigasi 1.3

a. Hampiri fungsi f(x) = sin (x) ke dalam deret Taylor orde 4 di sekitar $x_0 = 1$!

b. Hampiri fungsi f(x) = e^x ke dalam deret MacLaurin orde 5 di sekitar $x_0 = 0$!

c. Hampiri fungsi f(x) = cos (x) ke dalam deret MacLaurin orde 6 di sekitar $x_0 = 0$!

d. Hampiri fungsi f(x) = ln(x+1) ke dalam deret MacLaurin orde 4 di sekitar $x_0 = 0$!

2. Analisi Galat

Pada metode numerik selalu dihadapkan pada masalah kesalahan atau *error* yaitu seberapa besar kesalahan yang terjadi. Penyelesaian secara numeris dari suatu persamaan matematika hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai sebenarnya, sehingga dalam penyelesaian numerik terdapat galat atau kesalahan terhadap nilai sejati atau penyelesaian yang sebenarnya. Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran dengan solusi sejatinya. Semakin kecil galat, maka semakin teliti solusi numerik yang diperoleh. Misalkan $\hat{a}$ adalah nilai hampiran terhadap nilai sejati a, maka selisih $\varepsilon = a - \hat{a}$ disebut galat. Nilai galat positif ataupun negatif tidak berpengaruh, sehingga perhitungannya digunakan tanda mutlak, sehingga didefinisikan sebagai berikut:

$$|\varepsilon| = |a - \hat{a}|$$

Ukuran galat ε kurang bermakna karena tidak menjelaskan seberapa besar galat tersebut dengan nilai sejatinya. Sebagai contoh misalkan panjang seutas tali panjangnnya 99 cm, padahal panjang sebenarnya 100 cm, sehingga galatnya 100 – 99 = 1 cm. Kemudian sebatang pensil panjangnya 9 cm padahal panjang sebenarnya 10 cm, sehingga galatnya juga 1 cm, namun galat 1 cm pada pengukuran sebatang pensil lebih berarti dari pada galat 1 cm pada pengukuran panjang tali, mengapa?

Jika tidak ada keterangan panjang sesungguhnya kita menganggap kedua galat itu sama, sehingga untuk mengintepretasi kedua galat ini harus dinormalkan terhadap nilai sejatinya, sehingga melahirkan istilah **galat relatif** (ε_R). Galat relatif didefinisikan sebagai berikut:

$\varepsilon_R = \dfrac{\varepsilon}{a}$ atau dalam presentase $\varepsilon_R = \dfrac{\varepsilon}{a}$ x 100 %, untuk galat relatif hampiran $\varepsilon_{RA} = \dfrac{\varepsilon}{a}$

Karena galat dinormalkan terhadap nilai sejati, maka galat relatif tersebut dinamakan juga **galat relatif sejati**. Sehingga pengukuran pengukuran panjang tali mempunyai galat relatif sejati = 1/100 = 0,01, sedang pengukuran panjang pensil mempunyai galat relatif sejati = 1/10 = 0,1.

Soal Investigasi 1.4

Hitung galat (ε) dan galat relatif (ε_R) pada angka signifikan dengan masing-masing hampiran berikut:

a. Nilai sejati x = 2.71828182 dihampiri dengan nilai hampiran $\bar{x}$ = 2.7182.
b. Nilai sejati x = 98750 dihampiri dengan nilai hampiran $\bar{x}$ = 99000.
c. Nilai sejati x = $\sqrt{2}$ dihampiri dengan nilai hampiran $\bar{x}$ = 1.414

3. Sumber Utama Galat

Secara umum ada dua sumber penyebab galat dalam perhitungan numerik, yaitu

Galat Pemotongan dan galat Pembulatan.

a. Galat Pemotongan

Pengertian galat pemotongan merujuk pada galat yang disebabkan oleh penggantian ekspresi matematika yang rumit dengan rumus yang lebih sederhana. Penghentian suatu deret yang tak berhingga menjadi suatu deret yang berhingga itulah sebenarnya yang menyebabkan galat pemotongan.

Contoh 2:

Hampiran deret Taylor f(x) = cos (x) di sekitar x = 0,

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\Bigg|+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\ldots$$

Pemotongan

Pada contoh diatas, deret Taylor tersebut dipotong sampai suku orde ke-6. kita lihat deret Taylor tersebut dipotong sampai suku orde ke-6 tersebut tidak memberikan suku yang tepat. Galat pada nilai hampiran diakibatkan oleh pemotongan suku-suku deret. Jumlah suku-suku setelah pemotongan deret dinamakan galat pemotongan untuk cos (x). Tetapi kita tidak dapat menghitung galat pemotongan tersebut karena jumlahnya tak mungkin bisa dihitung. Namun, kita dapat menghampiri galat pemotongan ini dengan rumus suku sisa:

$R_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$, $x_0<c<x$. Pada contoh cos (x) diatas $R_6(x)=\frac{x^7}{7!}\cos(c)$.

Untuk nilai c pada batasan selang tertentu, nilai maksimum yang mungkin dari R_n untuk c dalam selang tersebut:

$$R_n(x)<\underset{x_0<c<x}{Maks}\, f^{(n+1)}(c)\times\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

Soal Investigasi 1.5

Gunakan deret Taylor orde 4 di sekitar $x_0 = 1$ untuk menghampiri ln (0,9) dan berikan taksiran untuk galat pemotongan maksimum yang dibuat!

b. Galat Pembulatan

Pembulatan maksudnya mengurangi cacah digit pada suatu nilai hampiran dengan cara membuang beberapa digit terakhir. Cara melakukan pembulatan sudah dijelaskan di depan. Galat pembulatan terjadi disebabkan karena pembulatan dalam komputasi numerik, sehingga pengulangan pembulatan tidak disarankan dalam komputasi numerik karena hanya akan memperbesar galat.

D. Lembar Investigasi

1. Bagi kelas menjadi lima kelompok heterogen baik dari jenis kelamin maupun kemampuannya!
2. Tiap kelompok mendapatkan satu soal investigasi secara random dari soal investigasi 1.1 – 1.5
3. Lakukan kegiatan investigasi seperti pada lembar investigasi berikut!

Lembar Investigasi
Kekeliruan Dalam Perhitungan Numerik

Kelompok :
Anggota : 1.
2.
3.
4.
5.
6.

1. Tulis soal yang didapat!

....
....
....
....

2. Cari referensi / landasan teori mengenai soal tersebut dan tuliskan di bawah!

....
....
....
....

3. Kerjakan soal tersebut

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4. Tuliskan kesulitan yang didapat

....
....
....
....

5. Kesimpulan soal

....
....
....
....
....

Bab II
Solusi Persamaan Tak Linier

Dalam bidang sains dan rekayasa, para ahli ilmu alam dan rekayasawan sering berhadapan dengan persoalan mencari solusi persamaan lazim disebut akar persamaan atau nilai-nilai nol. Umumnya persamaan yang akan dipecahkan muncul dalam bentuk tak linier yang melibatkan bentuk sinus, cosinus, eksponensial, logaritma, dan fungsi transenden lainnya.

A. Persamaan Tak Linier

Salah satu masalah yang paling umum ditemui dalam matematika adalah mencari akar suatu persamaan. Jika diketahui fungsi $f(x)$, akan dicari nilai-nilai x yang memenuhi $f(x) = 0$. Termasuk dalam masalah menentukan titik potong dua buah kurva. Apabila kurva-kurva tersebut dinyatakan oleh fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, maka absis titik potong kedua kurva tersebut merupakan akar-akar persamaan $f(x) - g(x) = 0$.

Definisi 2.1 **(akar suatu persamaan, pembuat nol fungsi)**
Misalkan f(x) adalah suatu fungsi kontinu. Setiap bilangan r pada domain f yang memenuhi f(r) = 0 disebut akar persamaan f(x) = 0, atau disebut juga pembuat nol fungsi f(x). Secara singkat, r disebut akar fungsi f(x).

Bentuk umum dari persamaan kuadrat dinyatakan dengan:

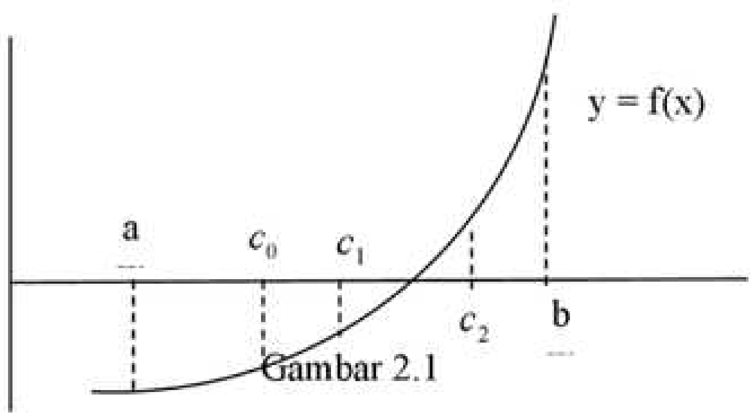
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dimana akar-akarnya dapat dicari dengan rumus abc, tetapi untuk polinomial dengan derajat yang lebih tinggi dapat dilakukan dengan memfaktorkan. Fungsi derajat tinggi biasanya belum tentu dapat difaktorkan, secara praktis untuk mencari akar-akarnya dapat dilakukan dengan metode numerik.

Adapun metode pencairan akar dalam numerik dilakukan secara iteratife. Secara umum metode pencairan akar dapat dikelompokkan menjadi dua golongan besar, yaitu metode tertutup dan metode terbuka. Metode tertutup (bracketing method) dilakukan pada pencairan akar pada selang [a,b]. selang tersebut dipastikan berisi minimal satu buah akar, karena itu metode ini selalu berhasil menemukan akar. Dengan kata lain fungsinya selalu konvergen (menuju) ke akar, karena itu metode tertutup kadang-kadang dinamakan juga metode konvergen. Sedangkan metode terbuka tidak memerlukan selang [a,b] yang mengandung akar. Tetapi yang diperlukan adalah tebakan awal akar, lalu dengan prosedur fungsi, kita menggunakannya untuk menghitung hampiran akar yang baru. Pada setiap kali penghitungan, hampiran akar yang lama dipakai untuk menghitung hampiran akar yang baru.

B. Metode Biseksi (Bagi Dua)

Berdasarkan pada Teorema Nilai Rata-rata pada kalkulus, misaklan f(x) suatu fungsi kontinu pada interval tertutup [a,b] sedemikian sehingga f(a) dan f(b) berlawanan tanda (f(a).f(b) < 0), maka terdapat suatu akar persamaan f(x) = 0 pada interval (a,b). Pada setiap kali iterasi, selang [a,b] kita bagi dua di x = c, sehingga terdapat dua upselang yang berukuran sama yaitu [a,c] dan [b,c]. Selang yang diambil untuk iterasi berikutnya adalah upselang yang memuat akar, bergantung apakah f(a).f(b)<0 atau f(c).f(b)<0. Selang yang baru dibagi dua lagi dengan cara yang sama, begitu seterusnya sampai ukuran selang yang baru sudah sangat kecil.



Gambar 2.1

Contoh 1:

Carilah akar real dari persamaan $f(x) \equiv x^3 - x - 1 = 0$, bila a = 1 dan b = 2

Jawab:

Untuk a = 1, maka f(1) = -1 < 0

b = 2, maka f (2) = 1 > 0, karena f(1) dan f(2) berlawanan tanda, maka terdapat akar yang terletak antara 1 dan 2.

Sehingga $c_0 = \dfrac{1+2}{2} = 1{,}5$

$f(1{,}5) = (1{,}5)^3 - (1{,}5) - 1 = 0{,}875 > 0$

- Akar terletak antara 1 dan 1,5

  $c_1 = \dfrac{1+1{,}5}{2} = 1{,}25$

  $f(1{,}25) = (1{,}25)^3 - (1{,}25) - 1 = -0{,}3 < 0$

- Akar terletak antara 1,25 dan 1,5

  $c_2 = \dfrac{1{,}25+1{,}5}{2} = 1{,}375$

  $f(1{,}375) = (1{,}375)^3 - (1{,}375) - 1 = 0{,}225 > 0$

- Akar terletak antara 1,25 dan 1,375

  $c_3 = \dfrac{1{,}25+1{,}375}{2} = 1{,}3125$

  $f(1{,}3125) = (1{,}3125)^3 - (1{,}3125) - 1 = -0{,}0525 < 0$

- Akar terletak antara 1,3125 dan 1,375

  $c_4 = \dfrac{1{,}3125+1{,}375}{2} = 1{,}34375$

  $f(1{,}34375) = (1{,}34375)^3 - (1{,}34375) - 1 = 0{,}06625 > 0$

dan seterusnya sampai ketelitian yang diinginkan diperoleh.

Teorema 2.1. Jika f(x) menerus di dalam selang [a,b] dengan f(a).f(b) < 0 dan $s \in [a,b]$ sehingga f(s) = 0 dan $|c_r| = \frac{a_r + b_r}{2}$, maka selalu berlaku dua ketidaksamaan berikut:

(i) $|s - c_r| \leq \frac{|b_r - a_r|}{2}$ dan (i) $|s - c_r| \leq \frac{b-a}{2^{r+1}}$, r= 0, 1, 2, . . .

bukti:

Misalkan pada iterasi ke-r kita mendapat selang $[a_r, b_r]$, yang panjangnya setengah panjang selang sebelumnya, $[a_{r-1}, b_{r-1}]$. Jadi

$$|\mathrm{b}_r - \mathrm{a}_r| = \frac{|\mathrm{b}_{r-1} - \mathrm{a}_{r-1}|}{2}$$

jelas bahwa :

$$|\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1| = \frac{|\mathrm{b}_0 - \mathrm{a}_0|}{2} = \frac{|\mathrm{b} - \mathrm{a}|}{2}$$

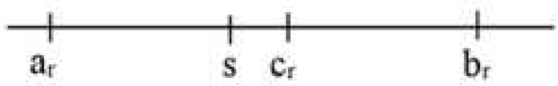
$$|\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2| = \frac{|\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1|}{2} = \frac{|\mathrm{b} - \mathrm{a}|}{2^2}$$

$$|\mathrm{b}_3 - \mathrm{a}_3| = \frac{|\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2|}{2} = \frac{|\mathrm{b} - \mathrm{a}|}{2^3}$$

. . .

$$|\mathrm{b}_r - \mathrm{a}_r| = \frac{|\mathrm{b}_{r-1} - \mathrm{a}_{r-1}|}{2} = \frac{|\mathrm{b} - \mathrm{a}|}{2^r}$$

Pada iterasi ke-r, posisi c_r, yang merupakan akar hampiran dan s yang merupakan akar sejati adalah seperti pada diagram berikut:



Berdasarkan diagram di atas jelaslah bahwa

$$|\mathrm{s} - \mathrm{c}_r| \leq \frac{|\mathrm{b}_r - \mathrm{a}_r|}{2}$$

$$|\mathrm{s} - \mathrm{c}_r| \leq \left|\frac{\mathrm{b}_r - \mathrm{a}_r}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\frac{b-a}{2^r}\right| = \left|\frac{b-a}{2^{r+1}}\right|$$

Jadi selisih antara akar sejati dengan akar hampiran tidak pernah lebih dari setengah epsilon.

Dengan mengingat kriteria berhenti adalah $|\mathrm{b}_r - \mathrm{a}_r| < \varepsilon$, maka dari (i) terlihat bahwa:

$$|\mathrm{s} - \mathrm{c}_r| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

sehingga

$$\left|\frac{b-a}{2^{r+1}}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2^r \geq \left|\frac{b-a}{\varepsilon}\right|$$

$$\Leftrightarrow r\ln(2) \geq \ln(b-a) - \ln(\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow r \geq \frac{\ln(b-a) - \ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$$

$$\Leftrightarrow R \geq \frac{\ln|b-a| - \ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$$

R adalah jumlah iterasi (jumlah pembagian selang) yang dibutuhkan untuk menjamin bahwa c adalah hampiran akar yang memiliki galat kurang dari ε.

<u>Contoh 2:</u>

Tentukan akar $f(x) = e^x - 5x^2$ di dalam selang [0,1] dan ε = 0,00001

Jawab:

Tabel 2.1 Tabel iterasi metode bagi dua

r	A	C	B	f(a)	f©	f(b)	lebar
0	0	0.5	1	1	0.398757108	-2.2816	0.5
1	0.5	0.75	1	0.393168	-0.69543096	-2.2816	0.25
2	0.75	0.625	0.5	-0.70619	-0.084828282	0.3987571	0.125
3	0.625	0.5625	0.5	-0.09274	0.173066324	0.3987571	0.0625
4	0.5625	0.59375	0.625	0.166374	0.048117499	-0.084828	0.03125
5	0.59375	0.609375	0.625	0.04083	-0.01735924	-0.084828	0.015625
6	0.609375	0.574563	0.53975	-0.02496	0.125787239	0.2589679	0.0348125
7	0.574563	0.591969	0.609375	0.118867	0.055453999	-0.017359	0.017406
8	0.591969	0.600672	0.609375	0.048201	0.01935703	-0.017359	0.008703
9	0.600672	0.605024	0.609375	0.011934	0.001076233	-0.017359	0.0043515
10	0.605024	0.602848	0.600672	-0.00644	0.010234925	0.019357	0.002176
11	0.602848	0.603936	0.605024	0.002768	-0.001828823	-0.006436	0.001088
12	0.603936	0.603392	0.602848	-0.00183	0.000470969	0.0027683	0.000544

r	A	C	B	f(a)	f©	f(b)	lebar
13	0.603392	0.603664	0.603936	0.000471	-0.000678623	-0.001829	0.000272
14	0.603664	0.603528	0.603392	-0.00068	-0.000103751	0.000471	0.000136
15	0.603528	0.60346	0.603392	-0.0001	0.000183628	0.000471	-6.8E-05
16	0.60346	0.603494	0.603528	0.000184	0.000016237	-0.000104	3.4E-05
17	0.603494	0.603511	0.603528	3.99E-05	0.000016237	-0.000104	1.7E-05
18	0.603511	0.603503	0.603494	-3.2E-05	0.000016237	3.994E-05	8.5E-06

Dari tabel di atas hampiran akar x = 0.603503

Soal Investigasi 2.1

Diketahui persamaan
$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.
Tentukan akar-akar dari persamaan di atas pada selang [1, 1.5] dengan menggunakan metode biseksi

Soal Investigasi 2.2

Gunakan metode biseksi untuk menyelesaikan persamaan
$f(x) = tgx - x - 1 = 0$.
Jika x = 1 dan x = 1.5 . (3.33)

Kasus yang mungkin terjadi pada penggunaan metode bagi-dua yaitu :

1. Jumlah akar lebih dari satu

   Bila dalam selang [a,b] terdapat lebih dari satu akar (banyaknya akar ganjil), hanya satu buah akar yang dapat ditemukan .

   Cara mengatasinya adalah dengan menggunakan selang [a,b] yang cukup kecil yang memuat hanya satu buah akar.
2. Akar Ganda

   Metode bagi dua tidak berhasil menemukan akar ganda. Hal ini disebabkan karena tidak terdapat perbedaan tanda di ujung-ujung selang yang baru.
3. Singularitas

   Pada titik singular, nilai fungsinya tidak terdefinisi. Bila selang [a,b] mengandung titik singular, tahapan metode bagi dua tidak pernah berhenti. Penyebabnya, metode bagi dua menganggap titik singular sebagai akar karena fungsi cenderung konvergen. Yang sebenarnya, titik singular bukanlah akar, melainkan akar semu.

   Cara mengatasinya adalah dengan memeriksa nilai $| f(b) - f(a) |$. Jika $| f(b) - f(a) |$ konvergen ke nol, akar yang dicari pasti akar sejati, tetapi jika $| f(b) - f(a) |$ divergen, akar yang dicari merupakan titik singular (akar semu).

   Pada setiap tahapan pada metode bagi dua, kita mencatat bahwa selisih antara akar sejati dengan akar hampiran tidak pernah melebihi setengah panjang selang saat itu. Pernyataan ini dinyatakan dengan teorema berikut:

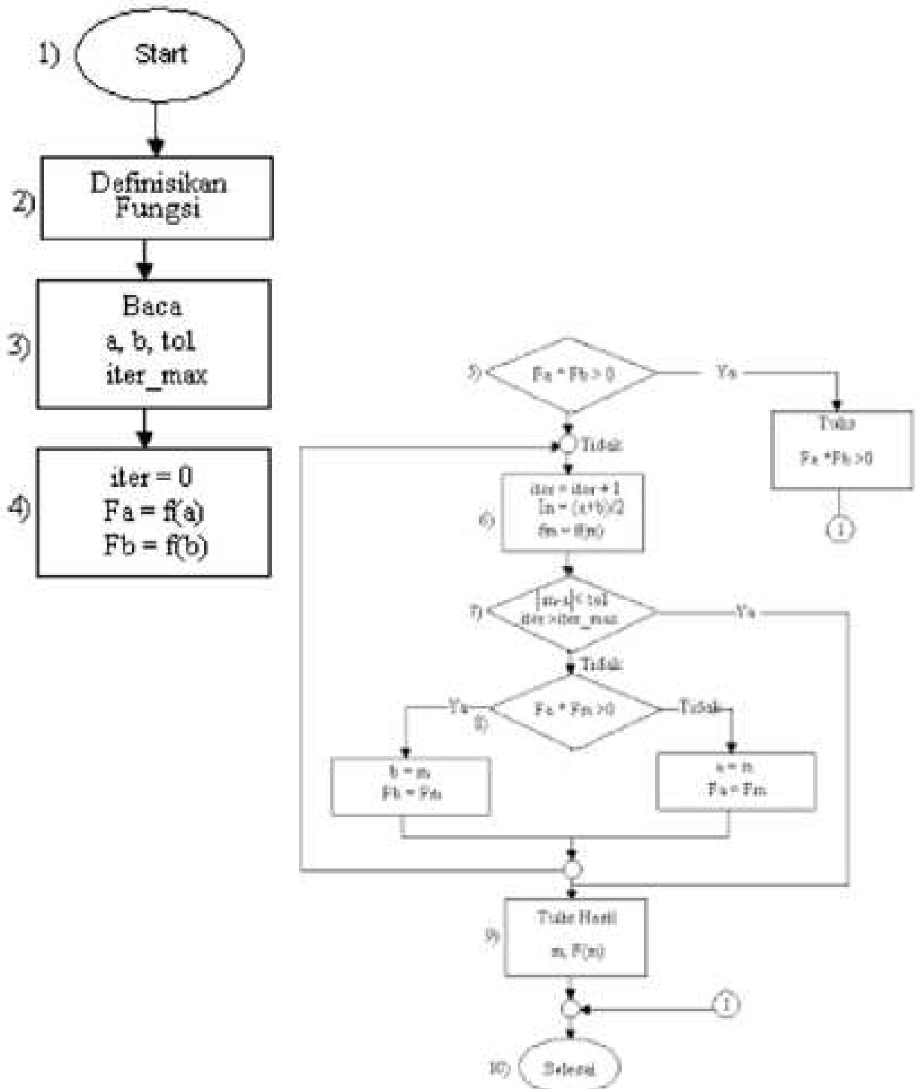
TEOREMA 3.1. jika *f(x)* menerus di dalam selang [a,b] dengan *f(a) f(b)* < 0 dan $s \in [a, b]$ sehingga *f(s)* = 0 dan $Cr = (a_r + b_r)/2$, maka selalu berlaku dua ketidaksamaan berikut:

$| s - c_r | \leq | b_r - a_r | /2$

dan

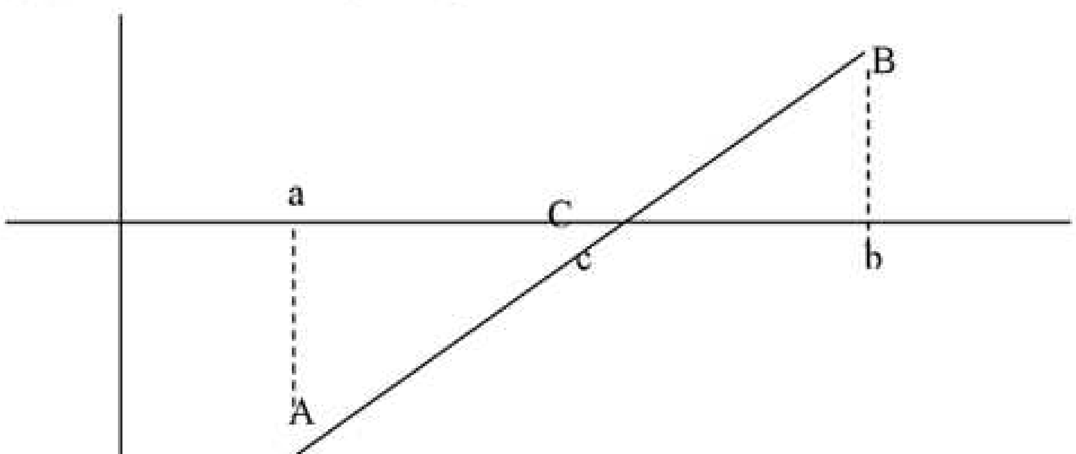
$| s - c_r | \leq | b_r - a_r | /2^{r+1}$, r = 0, 1, 2, ...

Berikut flowchart dari metode bagi dua



C. Metode *Regula-Falsi*

Meskipun metode bagi dua selalu berhasil menemukan akar, tetapi kecepatan konvergensinya sangat lambat. Kecepatan konvergensi dapat ditingkatkan bila nila *f(a)* dan *f(b)* juga turut diperhitungkan. Logikanya, bila *f(a)* lebih dekat ke nol daripada *f(b)* tentu akar lebih dekat ke $x = a$ daripada ke $x = b$. Metode yang memanfaatkan nilai *f(a)* dan *f(b)* ini adalah metode regula-falsi atau metode posisi palsu. Metode *Regula Falsi* (dalam bahasa latin) yang berarti metode posisi palsu atau *false position method* merupakan suatu metode yang memanfaatkan nilai *f(a)* dan nilai *f(b)*. *Regula falsi method is also known by the name of false position method. Interpolation is the approach of this method to find the root of nonlinear equations by finding new values for successive iterations*. Metode Regula falsi juga dikenal dengan nama metode posisi palsu. Interpolasi adalah pendekatan metode ini untuk menemukan akar persamaan nonlinier dengan menemukan nilai baru untuk iterasi berurutan. Dengan metode ini, dibuat suatu garis lurus yang menghubungkan titik *(a,f(a))* dan *(b,f(b))*. Perpotongan garis tersebut dengan sumbu x merupakan taksiran akar. Garis lurus tersebut seolah-olah berlaku menggantikan kurva *f(x)* dan memberikan posisi palsu dari akar.



Gambar 2.2

Gradien garis AB = gradien garis BC

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-0}{b-c}$$, dapat disederhanakan menjadi

$$c=b-\frac{f(b).(b-a)}{f(b)-f(a)} \quad .... (2.1)$$

Secara umum metode Regula Falsi lebih cepat konvergensinya jika dibandingkan dengan metode bagi dua, karena kecepatan konvergensi dapat ditingkatkan bila nilai *f(a)* dan *f(b)* juga diperhitungkan.

Contoh 3:

Tentukan akar dari soal contoh soal 11!

Jawab:

Tabel 2.2 Tabel iterasi metode regula falsi

r	a	c	b	f(a)	f©	f(b)	lebar
0	0	0.303030303	1	1	0.892053	-2.3	0.303030303
1	0.30303	0.497784028	1	0.892053	0.40061	-2.3	0.194754028
2	0.497784	0.572283003	1	0.40061	0.127938	-2.3	0.074499003
3	0.57228	0.594820322	1	0.12795	0.036388	-2.3	0.022540322
4	0.59482	0.601130634	1	0.036389	0.010005	-2.3	0.006310634
5	0.60113	0.602858085	1	0.010008	0.002726	-2.3	0.001728085
6	0.602858	0.603328142	1	0.002726	0.000741	-2.3	0.000470142
7	0.603328	0.603455756	1	0.000741	0.000202	-2.3	0.000127756
8	0.603456	0.603490824	1	0.000202	5.34E-05	-2.3	3.51238E-05
9	0.603491	0.603500068	1	5.26E-05	1.43E-05	-2.3	9.06778E-06

Dari tabel di atas hampiran akar x = 0.603500

Soal Investigasi 2.3

Diketahui persamaan $f(x)=x^3+2x^2+10x-20=0$. Tentukan akar-akar dari persamaan di atas pada selang [1, 1.5] dengan menggunakan metode regula-falsi

Perbaikan metode Regula-Falsi

Untuk mengatasi kemungkinan kasus titik mandek, metode regula-falsi kemudian diperbaiki (*modified false position method*). Caranya, pada akhir tahapan $r = 0$, kita sudah memperoleh selang baru akan dipakai pada tahapan $r = 1$. Berdasarkan selang baru tersebut, tentukan titik ujung selang yang tidak berubah (jumlah perulangan > 1) – yang kemudian menjadi titik mandek. Nilai f pada titik mandek itu diganti menjadi setengah kalinya, yang akan dipakai pada tahapan $r = 1$.

Modified Regula Falsi method:

In this method an improvement over Regula Falsi method is obtained by replacing the secant by straight lines of even-smaller slope until w *falls to the other side of the zero of* $\boldsymbol{f(x)}$. *The various steps in the method are given in the algorithm below:*

Algorithm:

Given a function $f(x)$, *continuous on an interval* $\boldsymbol{[a,b]}$ *satisfying the criteria* $\boldsymbol{f(a)\, f(b) < 0}$, *carry out the following steps to find the root of* ε *of* $\boldsymbol{f(x)}$. *in* $\boldsymbol{[a,b]}$:

(1) Set $\boldsymbol{a_0 = a\ ;\ b_0 = b\ ;\ F = f(a_0)\ ;\ G = f(b_0),\ w_0 = a_0}$

(2) For $n=0,1,2....,$ *until convergence criteria is satisfied, do:*

(a) compute $\boldsymbol{w_{n+1} = [Ga_n - Fb_n] / (G - F)}$

(b) If $\boldsymbol{(f(w_n)\, f(w_{n+1}) > 0)}$

Then Set $\boldsymbol{a_n+1 = a_n\ ;\ b_n+1 = w_n+1\ ;\ G = f(w_{n+1})}$

Also if $\boldsymbol{(f(w_n)\, f(w_{n+1}) > 0)}$ *Set* $\boldsymbol{F = F/2}$

Otherwise Set $\boldsymbol{a_n+1 = w_{n+1}\ ,\ F = f(w_{n+1})\ \ b_n+1 = b_n}$

Also if $\boldsymbol{(f(w_n)\, f(w_{n+1}) > 0)}$ *Set* $\boldsymbol{G = G/2}$

Example:

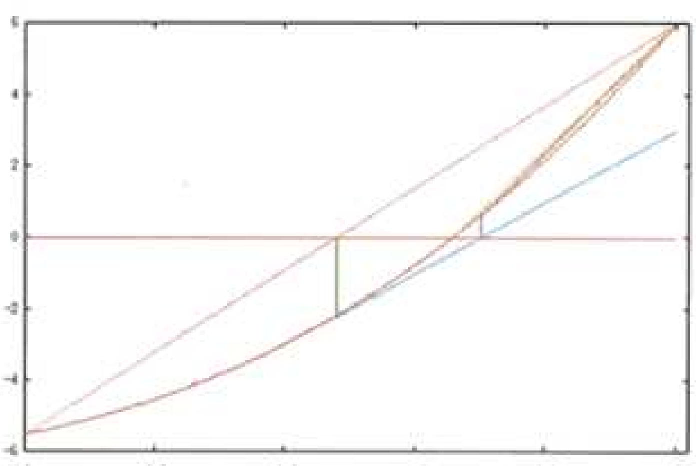
Solve $2x^3 - 2.5x - 5 = 0$ *for the root in the interval [1,2] by Modified Regula Falsi method.*

Solution: Since $f(1)\, f(2) = -33 < 0$ *we go ahead with finding the root of given function f(x) in [1,2]. Setting* $A0 = 1,\ b0 = 2$ *and following the above algorithm. Results are provided in the table below:*

Modified Regula Falsi Method

Iteration no.	a_n	b_n	ω_n	$f(\omega_n)$
0	1.0000000000	2.0000000000	1.4782608747	-2.2348976135
1	1.4782608747	2.0000000000	1.7010031939	0.5908976793
2	1.4782608747	1.7010031939	1.6544258595	-0.0793241411
3	1.6544258595	1.7010031939	1.6599385738	-0.0022699926
4	1.6599385738	1.7010031939	1.6602516174	0.0021237291
5	1.6599385738	1.6602516174	1.6601003408	0.0000002435

The geometric view of the example is provided in the figure below:



D. Metode Newton-Raphson

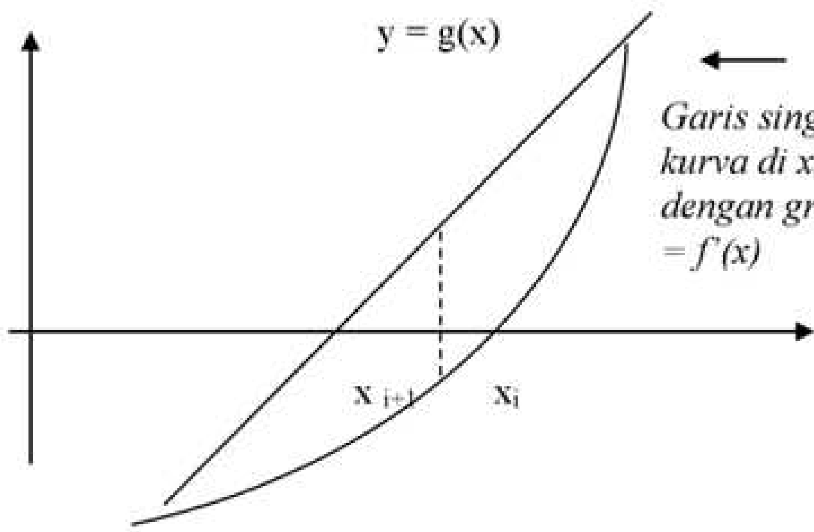
Di antara semua metode pencarian akar, metode Newton-Raphson lah yang paling terkenal dan paling banyak dipakai dalam terapan sains dan rekayasa. Metode ini paling banyak dipakai, karena konvergensinya paling cepat diantara metode lainnya.

The Newton-Raphson Method (or simply Newton's Method) is another so-called local method to determine the root of an equation. This method uses a single starting point (as opposed to the bounds required by the bisection method), and repeatedly uses a derivative to project a line to the axis of the root in question, as shown below. This results in a very fast convergence in many cases, but does require the solution of a derivative before the method can be used.

Metode Newton-Raphson (atau hanya Metode Newton) adalah metode lokal lain yang disebut untuk menentukan akar persamaan. Metode ini menggunakan titik awal tunggal (berlawanan dengan batasan yang diminta oleh metode terbelah), dan berulang kali menggunakan turunan untuk memproyeksikan garis ke sumbu akar yang dimaksud, seperti yang ditunjukkan di bawah ini. Hal ini menghasilkan konvergensi yang sangat cepat dalam banyak kasus, namun memerlukan solusi turunan sebelum metode tersebut dapat digunakan.

Penurunan rumus Metode Newton-Raphson dilakukan dengan dua cara, yaitu secara geometri dan dengan bantuan deret Taylor.

a. Penurunan rumus Metode Newton-Raphson secara geometri



Gambar 2.3 Tafsiran geometri metode Newton-Raphson

Pada gambar 2.3 diatas, gradien garis singgung di x_r adalah, ada $m = f'(x_r) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_r) - 0}{x_r - x_{r+1}}$ u

$$f'(x_r) = \frac{f(x_r)}{x_r - x_{r+1}}$$

Sehingga rumus metode Newton-Raphson adalah

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}, \text{ dengan } f'(x_r) \neq 0 \quad \text{.............. (2.2)}$$

b. Penurunan rumus Metode Newton-Raphson dengan bantuan deret Taylor.

Uraikan

$$f(x_{r+1}) \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r) f'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2} f''(t),$$

$x_r < t < x_{r+1}$

Bila dipotong sampai suku orde satu menjadi: $f(x_{r+1}) \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r) f'(x_r)$, karena untuk mencari akar maka $f(x_{r+1}) = 0$, sehingga $x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$, $f'(x_r) \neq 0$. Rumus tersebut merupakan rumus metode Newton-Raphson. Iterasi berhenti jika kondisinya $|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$

Catatan:

1. Jika terjadi $f'(x_r) = 0$, ulang kembali perhitunan iterasi dengan x_0 yang lain.
2. Jika persamaan $f(x) = 0$ memiliki lebih dari satu akar, pemilihan x_0 yang berbeda-beda dapat menemukan akar yang lain.
3. Dapat pula terjadi fungsi konvergen ke akar yang berbeda dari yang diharapkan.

<u>Contoh 3:</u>

Hitung akar $f(x) = e^x - 5x^2$ dengan metode Newton-Raphson. Gunakan ε = 0,00001 dan $x_0 = 1$!

Jawab:

$$f(x) = e^x - 5x^2$$
$$f'(x) = e^x - 10x$$

Dengan rumus Newton-Raphson:

$x_{r+1} = x_r - \frac{e^x - 5x^2}{e^x - 10x}$, dengan $x_0 = 1$:

$x_{r+1} = x_r - \frac{e^x - 5x^2}{e^x - 10x}$, tabel iterasinya:

Tabel 2.3 Tabel iterasi metode Newton-Raphson

r	x_r	$e^x - 5x^2$	$e^x - 10x$	x_{r+1}	$\lvert x_{r+1} - x_r \rvert$
0	1	-2.3	-7.3	0.684932	0.315068493
1	0.684932	-0.37117	-4.87483	0.608792	0.076140012
2	0.608792	-0.02247	-4.25725	0.603515	0.005276969
3	0.603515	-4.9E-05	-4.21405	0.603503	1.15823E-05
4	0.603503	1.91E-06	-4.21395	0.603503	4.52571E-07

Dari tabel diatas hampiran akar x = 0.603503 .

Secara umum, bila metode Newton-Raphson konvergen, kekonvergennya itu berlangsung sangat cepat. Titik potong garis singgung fungsi dengan sumbu-x semakin cepat bergerak mendekati akar sejati. Karena metode Newton-Raphson tergolong metode terbuka, maka dalam beberapa kasus iterasinya mungkin divergen.

Membuat grafik fungsi sangat membantu dalam pencarian akar. Grafik fungsi dapat memperlihatkan secara visual lokasi akar sejati. Dengan demikian tebakan awal yang bagus untuk akar dapat diturunkan. Pemilihan tebakan awal sebaiknya cukup dekat dengan akar. Selain itu, kita juga dapat mengetahui apakah fungsi tersebut mempunyai akar tidak. Pada kasus tidak ada akar, fungsinya akan divergen berosilasi.

Kriteria konvergensi metode Newton Raphson

Apakah persyaratan agar metode Newton Raphson konvergen? Perhatikan bentuk umum prosedur iterasi metode terbuka,

$$x_{r+1} = g(x_r)$$

Karena metode Newton-Raphson termasuk metode terbuka, maka dalam hal ini,

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Dengan mengingat syarat perlu agar fungsi konvergen adalah $|g'(x)| < 1$, maka

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)f'(x) - f'(x)f''(x)]}{[f'(x)]^2}$$
$$= \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Karena itu, metode Newton Raphson akan konvergen bila

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1$$

Soal Investigasi 2.4

Tentukan bagaimana cara menentukan $\sqrt{2}$, dengan memilih $x_0 = 1$ dan $\varepsilon = 0.000001$ dengan metode Newton-Raphson !

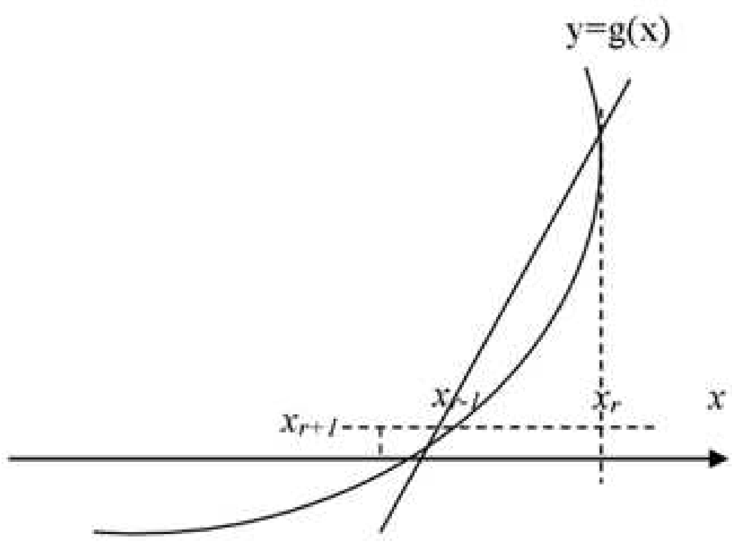
Soal Investigasi 2.5

Tentukan nilai 1/7, dengan memilih $x_0 = 0.2$ dan $\varepsilon = 0.0000001$ dengan metode Newton-Raphson !

E. Metode Secant

Metode Newton-Raphson memerlukan perhitungan pada turunan fungsi, $f'(x)$. Sehingga hal tersebut bisa menyebabkan kesalahan karena tidak semua fungsi mudah dicari turunannya. Turunan fungsi dapat dihilangkan dengan cara menggantinya dengan bentuk lain yang ekivalen, metode modifikasi dari metode Newton-Raphson ini dinamakan metode Secant.

The Secant Method performs the same task and works much in the same way as the NewtonRaphson Method, but without needing to know the derivative (and also without being subject to singularities with said analytical function). It differs on several key points: first, we start with two initial guesses at the root. It is important that these guesses be close to each other and near the root, otherwise we (as always) risk divergence. Second, instead of using the analytical derivative, we numerically calculate a secant line, saying that it's close to the derivative. By drawing this line between f(x) at our two guesses, the root of that line gives us our next guess for the function root. As the method converges, our guess gets closer and closer to zero.



Gambar 2.4

Berdasarkan gambar di atas dapat kita hitung gradien $f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{AC}{BC} = \frac{f(x_r) - f(x_{r-1})}{x_r - x_{r-1}}$

Jika dinyatakan ke dalam rumus Newton-Raphson menjadi:

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

Sehingga diperoleh:

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)(x_r - x_{r-1})}{f(x_r) - f(x_{r-1})}$$ .... (2.3), yang kemudian disebut rumus metode Secant. Dalam metode ini juga diperlukan tebakan akar awal yaitu x_0 dan x_1. Iterasi berhenti bila $|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$.

Contoh 4:

Hitunglah akar $f(x) = e^x - 5x^2$ dengan metode Secant. Gunakan ε = 0,00001, dan tebakan awal akar x_0 = 0.5 , x_1 = 1.

Jawab:

Tabel 2.4 Tabel iterasi metode Secant

i	xr	$f(x_r)$	$f(x_{r-1})$	$(x_r - x_{r-1})$	x_{r+1}	$x_{r+1} - x_r$
0	0.5	0.393168	0	0.5	0	-0.5
1	1	-2.3	0.393168	0.5	0.572994	-0.42701
2	0.572994	0.125114	-2.3	-0.42701	0.595024	0.02203
3	0.595024	0.035541	0.125114	0.02203	0.603765	0.008741
4	0.603765	-0.00111	0.035541	0.008741	0.603501	-0.00026
5	0.603501	1.04E-05	-0.00111	-0.00026	0.603503	2.44E-06

Dari tabel diatas hampiran akar x = 0.603501

Sepintas memang metode secant mirip dengan metode regula falsi, namun sesungguhnya prinsip dasar keduanya berbeda, adapun perbedaannya adalah sebagai berikut:

1. Pada metode regula falsi, diperlukan dua buah nilai awal a dan b (ujung-ujung selang) sedemikian sehingga $f(a)f(b) < 0$. Sedangkan pada metode Secant juga diperlukan dua buah nilai awal x0 dan x1 (tebakan awal akar), tetapi **<u>tidak harus</u>** $f(x_0)f(x_1) < 0$
2. Iterasi kedua, pada metode Regula-Falsi perpotongan garis lurus dengan sumbu-x **tetap** berada di dalam selang yang mengandung akar. Sedangkan perpotongan garis lurus dengan sumbu-x mungkin **menjauhi** akar.
3. Berdasarkan poin 2, pada metode Regula Falsi hasil iterasinya **selalu konvergen**, sedangkan pada metode Secant **mungkin divergen**.

Soal Investigasi 2.6

Gunakan metode Secant untuk menghitung salah satu akar persamaan $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$, jika $x_1 = 1$ dan $x_2 = 2$.

Soal Investigasi 2.7

Dengan menggunakan metode Secant carilah salah satu akar persamaan dari $f(x) = \cos(2x-1)$ dengan $x_1 = 1{,}1$ dan $x_2 = 1$ (Iterasi dihentikan jika $f(x) < 0{,}0001$) !

F. Lembar Investigasi

1. Bagi kelas menjadi lima kelompok heterogen baik dari jenis kelamin maupun kemampuannya!
2. Tiap kelompok mendapatkan satu soal investigasi secara random dari soal investigasi 2.1 – 2.7
3. Lakukan kegiatan investigasi seperti pada lembar investigasi berikut!

Lembar Investigasi
Solusi Persamaan Linier

Kelompok :
Anggota : 1.
2.
3.
4.
5.
6.

1. Tulis soal yang didapat!

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. Cari referensi / landasan teori mengenai soal tersebut dan tuliskan di bawah!

....
....
....
....
....

3. Kerjakan soal tersebut

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4. Tuliskan kesulitan yang didapat

....
....
....
....

5. Kesimpulan soal

....
....
....
....
....

Bab III
Solusi Sistem Persamaan Linier

A. Bentuk Umum Sistem Persamaan Linier

Sistem persamaan lanjar (SPL) dengan dengan n peubah dinyatakan sebagai

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \qquad \text{(P.3.1)}$$

Dengan menggunakan perkalian matriks, kita dapat menulis (P.4.1) sebagai persamaan matriks

$Ax = b$ (P.3.2)

yang dalam hal ini,

$A = [a_{ij}]$ adalah matriks berukuran n ´ n

$x = [x_j]$ adalah matriks berukuran n ´ 1

$b = [b_j]$ adalah matriks berukuran n ´ 1 (disebut juga vektor kolom)

yaitu

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

Solusi (P.3.1) adalah himpunan nilai x_1, x_2, …, x_n yang memenuhi n buah persamaan. Metode penyelesaian sistem persamaan lanjar dengan determinan (aturan Cramer) tidak praktis untuk sistem yang besar. Beberapa metode penyelesaian praktis sistem persamaan lanjar yang kita bahas di sini adalah:

Metode eliminasi Gauss
Metode eliminasi Gauss-Jordan
Metode matriks balikan
Metode dekomposisi *LU*
Metode lelaran Jacobi
Metode lelaran Gauss-Seidel.

Walaupun metode penyelesaian SPL beragam, namun sebagian besar metode tersebut, terutama metode 1 sampai 4, tetap didasarkan kepada metode yang paling dasar, yaitu eliminasi Gauss. Metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan, dan metode dekomposisi *LU* merupakan bentuk variasi lain dari metode eliminasi Gauss. Sedangkan metode lelaran Jacobi dan metode lelaran Gauss-Seidel dikembangkan dari gagasan metode lelaran pada solusi persamaan nirlanjar.

B. Metode Eliminasi Gauss

Metode ini berangkat dari kenyataan bahwa bila matriks A berbentuk *segitiga atas* seperti sistem persamaan berikut ini

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

maka solusinya dapat dihitung dengan **teknik penyulihan mundur** (*backward substitution*):

$$a_{nn}x_n = b_n \quad \rightarrow \quad x_n = b_n / a_{nn}$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \quad \rightarrow \quad x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$a_{n-2,n-2}x_{n-2} + a_{n-2,n-1}x_{n-1} + a_{n-2,n}x_n = b_{n-2} \quad \rightarrow \quad x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2,n-1}x_{n-1} - a_{n-2,n}x_n}{a_{n-2,n-2}}$$

$\vdots$

dst.

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j}{a_{kk}} \quad , k = n\text{-}1, n\text{-}2, \ldots, 1 \text{ dan } a_{kk} \neq 0. \qquad \text{P.4.3)}$$

Kondisi a_{kk} ¹ 0 sangat penting, sebab bila a_{kk} = 0, persamaan (P.4.3) mengerjakan pembagian dengan nol. Apabila kondisi tersebut tidak dipenuhi, maka SPL tidak mempunyai jawaban.

Di dalam Bab 3 ini, kita menggunakan struktur data matriks untuk semua algoritma yang dijelaskan nanti. Pendeklarasiannya adalah sebagai berikut ini:

```
(* KAMUS GLOBAL *)
const
  n = … ; { ukuran matriks A }
type
  matriks = array[1..n, 1..n] of real;
  vektor = array[1..n] of real;
var
  { larik/matriks yang
  digunakan untuk
  sistem Ax = b } A :
  matriks;
  b : vektor;
  x : vektor;
```

Contoh 3.1

Selesaikan sistem persamaan lanjar berikut dengan teknik penyulihan mundur

$4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 20$

$-2x_2 + 7x_3 - 4x_4 = -7$

$6x_3 + 5x_4 = 4$

$3x_4 = 6$

Penyelesaian:

$x_4 = 6/3 = 2$

$$x_3 = \frac{(4 - 5(2))}{6} = -1$$

$$x_2 = \frac{-7 - 7(-1) + 4(2)}{-2} = -4$$

$$x_1 = \frac{20 + 1(-4) - 2(-1) - 3(2)}{4} = 3$$

Jadi, solusinya adalah $x = (3, -4, -1, 2)^T$.

Metode eliminasi Gauss pada prinsipnya bertujuan mentransformasi sistem $Ax = b$ menjadi sistem

$$Ux = y \qquad \text{(P.3.4)}$$

dengan U adalah matriks *segitiga atas*. Selanjutnya solusi x dapat dihitung dengan teknik penyulihan mundur. Contohnya pada sistem dengan 4 persamaan lanjar berikut (Elemen matriks A dan vektor kolom b disatukan dalam bentuk satu bentuk matriks):

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{array}\right]}_{[A,\, b]} \xrightarrow[\text{menjadi } [U,\, y]]{\text{dieliminasi}} \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} & b_4^{(3)} \end{array}\right]}_{[U,\, y]}$$

Tanda pangkat (1), (2), (3) menunjukkan bahwa elemen matriks A telah berubah satu kali, dua kali, dan tiga kali.

Proses eliminasi terdiri atas tiga operasi baris elementer:

1. *Pertukaran* : Urutan dua persamaan dapat ditukar karena pertukaran tersebut tidak mempengaruhi solusi akhir.
2. *Penskalaan* : Persamaan dapat dikali dengan konstanta bukan nol, karena perkalian tersebut tidak mempengaruhi solusi akhir.
3. *Penggantian* : Persamaan dapat diganti dengan penjumlahan persamaan itu dengan gandaan persamaan lain. Misalnya persamaan diganti dengan selisih persamaan itu dengan dua kali persamaan lain; yaitu

   $$baris_r := baris_r - m_{p,r}\, baris_p \qquad \text{(P.3.5)}$$

Nilai $a_{r,\,r}$ pada posisi $(r,\, r)$ yang digunakan untuk mengeliminasi x_r pada baris $r + 1,\ r + 2,\ \ldots,\ N$ dinamakan elemen *pivot* dan persamaan pada baris ke-r disebut **persamaan *pivot*** [MAT92]. Ada kemungkinan *pivot* bernilai nol sehingga pembagian dengan nol tidak dapat dielakkan. Tata-ancang eliminasi yang tidak mempedulikan nilai *pivot* adalah tatancang yang naif (*naive*) atau sederhana. Metode eliminasi Gauss seperti ini dinamakan **metode eliminasi Gauss naif** (*naive Gaussian elimination*), karena metodenya tidak melakukan pemeriksaan kemungkinan pembagian dengan nol. Pada metode eliminasi Gauss naif tidak ada operasi pertukaran baris dalam rangka menghindari *pivot* yang bernilai nol itu.

C. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Metode eliminasi Gauss-Jordan merupakan variasi dari metode eliminasi Gauss. Dalam hal ini, matriks A dieliminasi menjadi matriks identitas I. Di sini tidak diperlukan la gi teknik penyulihan mundur untuk memperoleh solusi SPL. Solusinya langsung diperoleh dari vektor kolom b hasil proses eliminasi.

$$Ax = b \quad \rightarrow \quad Ix = b'$$

Dalam bentuk matriks, eliminasi Gaus-Jordan ditulis sebagai

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & b_2' \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & b_3' \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_n' \end{array}\right]$$

Solusinya:

$$\begin{array}{llll} x_1 & & & = b_1' \\ & x_2 & & = b_2' \\ & & \ldots & \ldots \\ & & & x_n = b_n' \end{array}$$

Seperti pada metode eliminasi Gauss naif, metode eliminasi Gauss-Jordan naif tidak menerapkan tata-ancang pivoting dalam proses eliminasinya.

Program 3.1 Metode Eliminasi Gauss-Jordan Naif

```
procedure Eliminasi_Gauss_Jordan_Naif(A : matriks; b:
vektor; n:integer;
                                       var x : vektor);
{ Menghitung solusi sistem persamaan lanjar
   Ax = b dengan metode eliminasi Gauss-
   Jordan.
  K.Awal : A adalah matriks yang berukuran n ' n,
           elemennya sudah terdefinisi harganya;
           b adalah vektor kolom yang berukuran n
           ' 1
  K.Akhir: x berisi solusi sistem
}
var
   i; k, j : integer;
   m, tampung: real;
begin
   for k:=1 to n do
```

```
    begin
      tampung:=a[k,k];
      for j:=1 to n do {bagi
          elemen baris k
          dengan a[k,k]}
          a[k,j]:=a[k,j]/tamp
          ung;
      {endfor}
      b[k]:=b[k]/tampung;   {jangan lupa b[k] juga
      dibagi dengan a[k,k]}
      for i:=1 to n do      {eliminasi elemen baris i
      s/d baris n, i'k}

       Begin
           if i<>k then
           begin
               m:=a[i,k];
               for j:=1 to n do {eliminasi
                   elemen dari kolom 1 s/d
                   kolom n} a[i,j]:=a[i,j] -
                   m*a[k,j];
               {endfor}
                b[i]:=b[i] - m*b[k]; {eliminasi elemen
                vektor b pada baris i}
           end;
        end;
   end;
   {Solusi
   langsung
   didapat dari
   vektor kolom b}
   for i:=1 to n
   do x[i]:=b[i];
end;
```

Contoh 3.2

[CHA91] Selesaikan sistem persamaan lanjar di bawah ini dengan metode eliminasi Gauss- Jordan.

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\
0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\
0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4
\end{aligned}
$$

Penyelesaian:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \end{array}\right]
\begin{array}{c} R_1/3 \\ \sim \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.0333333 & -0.0666667 & 2.61667 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{l} R_2 - 0.1\,R1 \\ R_3 - 0.3\,R1 \\ \sim \end{array}
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -0.0333333 & -0.0666667 & 2.61667 \\ 0 & 7.00333 & -0.2933333 & -19.5617 \\ 0 & -0.190000 & 10.0200 & 70.6150 \end{array}\right]
$$

$$
R_2\,/7.00333
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.0333333 & -0.0666667 & 2.61667 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & -0.190000 & 10.0200 & 70.6150 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{l} R_1 - (-0.003333)R_2 \\ R_3 - (-0.190000)R_2 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.0680629 & 2.52356 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & 0 & 10.01200 & 70.0843 \end{array}\right]
$$

$$
R_3\,/10.0200
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.0680629 & 2.52356 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & 0 & 1 & 7.00003 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{l} R_1 - (-0.0680629)\,R_3 \\ R_2 - (-0.0418848)\,R_2 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3.00000 \\ 0 & 1 & 0 & -2.50001 \\ 0 & 0 & 1 & 7.00003 \end{array}\right]
$$

Solusi: $x_1 = 3.00000$
$x_2 = -2.50001$
$x_3 = 7.00003$

Penyelesaian SPL dengan metode eliminasi Gauss-Jordan membutuhkan jumlah komputasi yang lebih banyak daripada metode eliminasi Gauss. Karena alasan itu, metode eliminasi Gauss sudah cukup memuaskan untuk digunakan dalam penyelesaian SPL. Namun metode eliminasi Gauss-Jordan merupakan dasar pembentukan matriks balikan.

D. Metode Gauss-Seidel

Kecepatan konvergen pada lelaran Jacobi dapat dipercepat bila setiap harga x_i yang baru dihasilkan segera dipakai pada persamaan berikutnya untuk menentukan harga x_{i+1} yang lainnya.

Lelaran pertama:

$$x_1^{(1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)} - a_{14}x_4^{(0)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{b_1 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)} - a_{24}x_4^{(0)}}{a_{22}}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)} - a_{34}x_4^{(0)}}{a_{33}}$$

$$x_4^{(1)} = \frac{b_4 - a_{41}x_1^{(1)} - a_{42}x_2^{(1)} - a_{43}x_3^{(1)}}{a_{44}}$$

Lelaran kedua:

$$x_1^{(2)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)} - a_{14}x_4^{(1)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{b_1 - a_{21}x_1^{(2)} - a_{23}x_3^{(1)} - a_{24}x_4^{(1)}}{a_{22}}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{(2)} - a_{32}x_2^{(2)} - a_{34}x_4^{(1)}}{a_{33}}$$

$$x_4^{(2)} = \frac{b_4 - a_{41}x_1^{(2)} - a_{42}x_2^{(2)} - a_{43}x_3^{(2)}}{a_{44}}$$

Rumus umum:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}, k = 0,1,2,\ldots$$

Contoh 3.3

[MAT92] Tentukan solusi SPL

$4x - y + z \quad = 7$

$4x - 8y + z \quad = -21$

$-2x + y + 5z = 15$

dengan nilai awal $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 2)$.

(Solusi sejatinya adalah (2, 4, 3))

Penyelesaian:

Persamaan lelarannya,

$$x_{r+1} = \frac{7 + y_r - z_r}{4}$$

$$y_{r+1} = \frac{21 + 4x_r - z_r}{8}$$

$$z_{r+1} = \frac{15 + 2x_r - y_r}{5}$$

Lelarannya

$$x_1 = \frac{7+2-2}{4} = 1.75$$

$$y_1 = \frac{21+4(1.75)+2}{8} = 3.75$$

$$z_1 = \frac{15+2(1.75)-3.75}{5} = 3.000$$

$$x_2 = \frac{7+3.75-2.95}{4} = 1.95$$

$$y_2 = \frac{7+3.75-2.95}{8} = 3.96875$$

$$z_2 = \frac{15+2(1.95)-3.968375}{5} = 2.98625$$

...

$x_{10} = 2.00000000$
$y_{10} = 4.00000000$
$z_{10} = 3.00000000$

Jadi, solusi SPL adalah x = 2.00000000, y = 4.00000000, z = 3.00000000

E. Lembar Investigasi

Lembar Investigasi
Solusi Sistem Persamaan Liniae

Kelompok :
Anggota : 1.
2.
3.
4.
5.
6.

1. Tulis soal yang didapat!

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. Cari referensi / landasan teori mengenai soal tersebut dan tuliskan di bawah!

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. Kerjakan soal tersebut

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4. Tuliskan kesulitan yang didapat

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

5. Kesimpulan soal

....
....
....
....
....
....
....

Bab IV
Interpolasi

A. Interpolasi Numerik

Interpolasi adalah proses pencarian dan perhitungan nilai suatu fungsi yang grafiknya melewati sekumpulan titik yang diberikan. Titik-titik tersebut kemungkinan merupakan hasil eksperimen dalam sebuah percobaan, atau dari hasil sebuah fungsi yang diketahui. Fungsi interpolasi yang dibicarakan pada bab ini adalah interpolasi pada fungsi polinomial, karena fungsi tersebut paling banyak dipakai. Tujuan utama mendapatkan polinomial hampiran adalah untuk menggantikan suatu fungsi yang rumit dengan fungsi yang lebih sederhana.

Interpolasi digunakan untuk menyelesaikan masalah dalam bidang teori hampiran. Untuk memberikan wawasan, berikut disajikan sebuah masalah hampiran dan kemungkinan pemakaian interpolasi untuk menyelesaikannya. Diberikan sebuah tabel nilai-nilai fungsi, misalnya $f(x) = \cos(x)$, interpolasi dapat digunakan untuk mencari nilai-nilai f(x) untuk nilai-nilai x yang tidak terdapat di dalam tabel. Salah satu solusi adalah mencari fungsi yang mencocokan (fit) titik-titik data di dalam tabel. Pendekatan seperti ini dinamakan pencocokan kurva (curve fitting). Fungsi yang diperoleh dari pendekatan ini merupakan fungsi hampiran, sehingga nilai fungsinya tidak setepat nilai aslinya.

Misalkan kita mempunyai data yang disajikan dalam tabel berikut ini:

Table 3.1

x	x_1	x_2	x_3	......	x_n
y	y_1	y_2	y_3	......	y_n

Dengan $x_1 < x_2 < .... < x_n$. Kita ingin mencari sebuah polinomial P(x) sedemikian sehingga $P(x_i) = y_i$, untuk $1 \le i \le n$. Polinomial ini dikatakan menginterpolasi nilai-nilai pada tabel. Kita dapat menggunakan polinomial ini untuk menghitung suatu nilai y yang berkaitan dengan suatu x, yang tidak terdapat dalam tabel tapi terletak diantara nilai-nilai x pada tabel tersebut. Polinomial interpolasi tergantung pada nilai-nilai dan banyaknya nilai x dan y yang diberikan.

B. Interpolasi Polinom

Metode interpolasi yang paling banyak digunakan adalah interpolasi polinomial. Persamaan polinomial adalah persamaan aljabar yang mengandung jumlah dari variabel x berpangkat bilangan bulat (integer). Bentuk umum persamaan polinomial adalah:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \quad .... (3.1)$$

dengan $a_0, a_1, ..., a_n$ adalah parameter yang akan dicari berdasarkan titik data, n adalah derajat (order) dari persamaan polinomial dan x adalah variabel bebas.

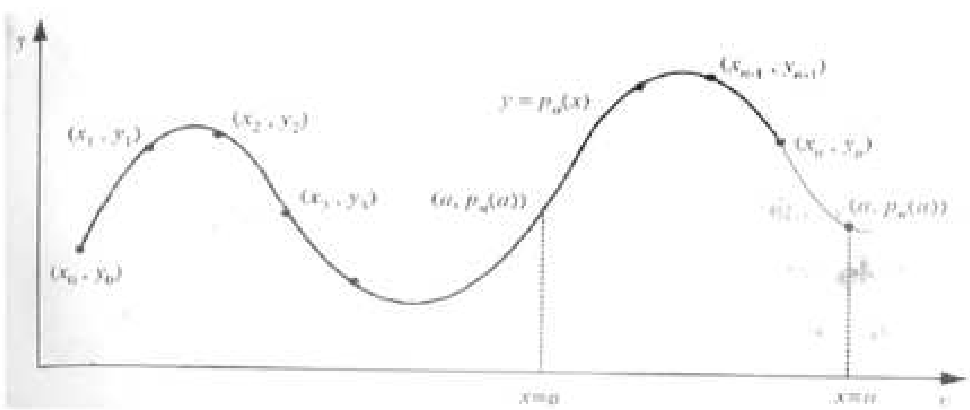
Diberikan n+1 buah titik yang berbeda, (x_0, y_0), $(x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$, . Tentukan polinom $p_n(x)$ yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian sehingga

$y_i = p_n(x_i)$ untuk i = 0, 1, 2, ..., n

Nilai y_i dapat berasal dari fungsi matematika f(x) sedemikian sehingga $y_i = f(x_i)$, sedang $p_n(x)$ adalah fungsi hampiran terhadap f(x). Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di x = a, yaitu. Bergantung pada letaknya, nilai x = a mungkin terletak di dalam rentang titik-titik data ($x_0 < a < x_n$) atau di luar rentang titik-titik data ($a < x_0$ atau $a > x_n$):

- ✓ jika $x_0 < a < x_n$ maka $y_k = p(x_k)$ disebut nilai interpolasi (*interpolated value*)
- ✓ jika $x_k < x_0$ atau $x_k > x_n$ maka $y_k = p(x_k)$ disebut nilai ekstrapolasi (*extrapolated value*)

Nilai interpolasi dan ekstrapolasi dapat ditunjukkan gambar 3.1 berikut.

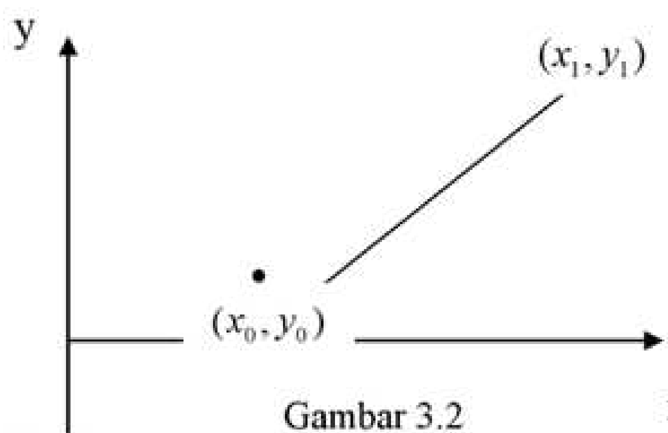


Gambar 3.1

1. Interpolasi Linier

Interpolasi linier adalah interpolasi dua buah titik dengan sebuah garis lurus. Misal diberikan dua buah titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1). Polinom yang menginterpolasi kedua titik itu adalah persamaan garis lurus yang berbentuk:

$p_1(x) = a_0 + a_1 x$ .... (3.2)



Gambar 3.2

Koefisien a_0 dan a_1 dicari dengan proses substitusi dan eleminasi. Dengan substitusi (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) ke dalam persamaan (3.2), diperoleh dua persamaan linier:

$y_0 = a_0 + a_1 x_0$

$y_1 = a_0 + a_1 x_1$

Kedua persamaan di atas jika diselesaikan dengan eleminasi akan memberikan persamaan berikut:

$a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ ..... (3.3) dan $a_0 = \dfrac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}$ .... (3.4)

Substitusi (3.3) dan (3.4) ke dalam (3.2), sehingga di dapat persamaan garis lurus sebagai berikut:

$p_1(x) = \dfrac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} + \dfrac{(y_1 - y_0)x}{(x_1 - x_0)}$ .... (3.5)

Dengan sedikit manipulasi aljabar, persamaan (3.5) dapat disusun menjadi

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) \text{ .... } (3.6)$$

Persamaan (3.6) adalah persamaan garis lurus yang melalui dua buah titik (x_0, y_0) dan (x_1, y_1). Kurva $p_1(x)$ ini berupa garis lurus (gambar 3.2)

Contoh 1:

Perkirakan jumlah penduduk Amerika Serikat tahun 1968 berdasarkan data tabulasi berikut:

Tahun	1960	1970
Jumlah penduduk (juta)	179.3	203.2

Jawab:

Dengan menggunakan persamaan (3.6) diperoleh:

$$p_1(1968) = 179.3 + \frac{(203.2 - 179.3)(1968 - 1960)}{1970 - 1960} = 198.4$$

Jadi taksiran jumlah penduduk Amerika Serikat tahun 1968 adalah 198.4 juta jiwa.

Contoh 2:

Diketahui data ln(9.0) = 2.1972, ln(9.5)=2.2513, tentukan ln(9.2) dengan interpolasi linear sampai 1 angka signifikan, jika nilai sejati ln(9.2)=2.2192 !

Jawab:

Dengan menggunakan persamaan (3.6) diperoleh:

$$p_1(9.2) = 2.1972 + \frac{(2.1513 - 2.1972)(9.2 - 9.0)}{9.5 - 9.0} = 2.2188$$

Sehingga galat = 2.2192 – 2.2188 = 0.0004. terlihat dari galat tersebut interpolasi linier memperoleh ketelitian hanya pada 3 angka signifikan, sehingga hanya benar sampai 3 angka signifikan.

2. Interpolasi Kuadratik

Misalkan diberikan tiga buah titik data (x_0, y_0), (x_1, y_1), dan Polinom yang menginterpolasi ketiga buah titik itu adalah polinom kuadrat yang berbentuk:

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \text{ .... (3.7)}$$

Polinom $p_2(x)$ ditentukan sebagai berikut:

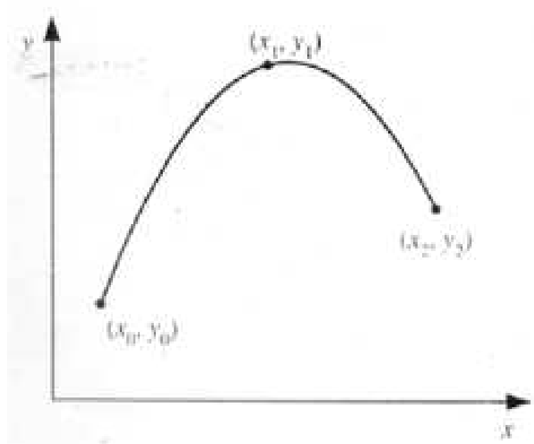
✓ Substitusikan (x_i, y_i) ke persamaan (3.7), i = 0, 1, 2, sehingga diperoleh tiga buah persamaan dengan tiga buah parameter yang tidak diketahui, yaitu a_0, a_1 dan a_2. Sebagai berikut:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^{\,2} = y_0$$

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^{\,2} = y_1$$

$$a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^{\,2} = y_2$$

✓ Hitung nilai a_0, a_1 dan a_2 dengan metode eleminasi Gauss. Bila digambar, kurva polinom kuadrat berbentuk parabola seperti pada gambar 3.3 berikut:



Gambar 3.3. Interpolasi Kuadratik

Contoh 3:

Diketahui titik ln(8.0) = 2.0794, ln(9.0) = 2.1972, dan ln(9.5) = 2.2513. tentukan nilai ln(9.2) dengan interpolasi kuadratik!

Jawab:

Sistem persamaan linier yang terbentuk adalah

$$a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 = 2.0794$$

$$a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 = 2.1972$$

$$a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 = 2.2513$$

Setelah diselesaikan dengan metode eleminasi Gauss menghasilkan a_0 = 0.6762, a_1 =0.2266 dan a_2 = -0.0064, dan polinom kuadratnya adalah:

$p_2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2$, sehingga

$p_2(9.2) = 2.2192$, hasilnya sama dengan nilai sejatinya, ini berarti nilai galatnya adalah 0.

3. Interpolasi Kubik

Misal diberikan empat titik data (x_0, y_0), (x_1, y_1) ,(x_2, y_2) dan (x_3, y_3). Polinom yang menginterpolasi keempat titik tersebut adalah polinom kubik yang berbentuk:

$$p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

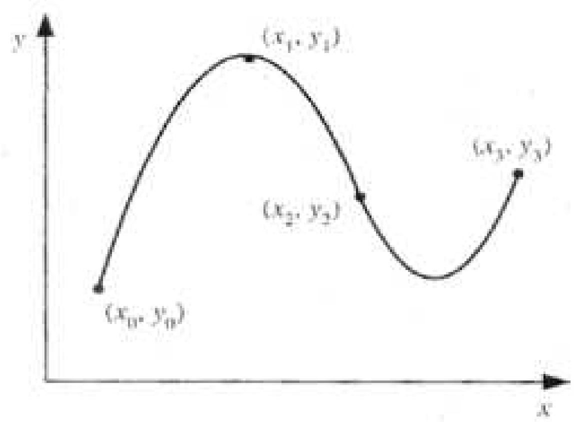
Polinom $p_3(x)$ ditentukan sebagai berikut

✓ Substitusikan (x_i, y_i) ke persamaan (3.8), i = 0, 1, 2, 3, sehingga diperoleh empat buah persamaan dengan empat buah parameter yang tidak diketahui, yaitu a_0, a_1, a_2 dan a_3 Sebagai berikut:

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 = y_0$$
$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = y_1$$
$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = y_2$$
$$a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 = y_3$$

✓ Hitung nilai a_0, a_1, a_2 dan a_3 dengan metode eleminasi Gauss.

Bila digambar, kurva polinom kubik seperti pada gambar 3.4 berikut:



Gambar 3.4. Interpolasi Kubik

Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat n, untuk n yang lebih tinggi, sebagai berikut:

$$p_n(x) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + a_3x_n^3 + \ldots a_rx_n^r \quad ..\ (3.9)$$

Dengan catatan tersedia (n+1) buah titik data. Dengan mensubsitusikan (x_i, y_i) ke dalam persamaan polinom diatas, untuk i = 1, 2, 3, ... r, untuk diperoleh r buah persamaan dalam sistem persamaan linier dalam a_0, a_1, a_2, ... a_r. Solusi sistem persamaan linier tersebut diselesaikan dengan metode eleminasi Gauss.

Soal Investigasi 3. 1

Hampiri fungsi $f(x) = \cos(x)$ dengan polinom interpolasi berderajat 3 di dalam selang [0.0, 1.2]. gunakan 4 titik $x_0 =$ 0.0, $x_1 =$ 0.4, $x_2 =$ 0.8, $x_3 =$ 1.2. Perkirakan nilai $p_3(0.5)$ dan bandingkan dengan nilai sejatinya! Diketahui nilai sejatinya 0.877583.

C. Polinom Newton

Kita tinjau kembali polinom linier pada persamaan (3.6):

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

Bentuk persamaan ini bisa ditulis sebagai berikut:

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) \text{ .... (3.10)}$$

yang mana $a_0 = y_0 = f(x_0)$ .... (3.11)

dan $a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ .... (3.12)

Persamaan (3.12) ini merupakan bentuk selisih terbagi (*divided-difference*) dan dapat ditulis menjadi:

$$a_1 = f[x_1, x_0] \text{ .... (3.13)}$$

Setelah polinom linier polinom kuadratik dapat dinyatakan dalam bentuk

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \text{ ....(3.14),}$$

atau

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \text{ .... (3.15)}$$

Persamaan (3.15) menunjukkan bahwa $p_2(x)$ dapat dibentuk dari polinom sebelumnya, yaitu $p_1(x)$. Jadi tahapan pembentukan polinom Newton adalah sebagai berikut:

$$p_1(x) = p_0(x) + a_1(x - x_0)$$
$$= a_0 + a_1(x - x_0)$$
$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$p_3(x) = p_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

.

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1).....(x - x_{n-1})$$
$$= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$
$$... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) \quad ....(3.16)$$

Nilai konstanta a_0, a_1, a_2, ... a_n merupakan nilai selisih terbagi dengan masing-masing:

$$a_0 = f(x_0)$$
$$a_1 = f[x_1, x_0]$$
$$a_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

.
.
.

$a_n = f[x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_0]$, yang mana:

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

.

.

.

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots x_0]}{x_n - x_0}$$

..........(3.17)

Karena tetapan a_0, a_1, a_2, ... a_n merupakan nilai selisih terbagi, maka polinom Newon disebut juga **polinom interpolasi selisih-terbagi Newton**. Nilai selisih terbagi ini dapat dihitung dengan tabel yang disebut tabel selisih-terbagi. Misalkan disajikan suatu tabel selisih-terbagi untuk 4 titik (n = 3) sebagai berikut:

Table 3.2

I	x_i	$y_i = f(x_i)$	ST-1	ST-2	ST-3
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

Keterangan:

ST : Selisih Terbagi

Contoh 4:

Hitung f(9.2) dari nilai-nilai (x,y) yang diberikan pada tabel dibawah dengan polinom Newton berderajat 3.

Jawab:

Tabel selisih-terbagi:

I	x_i	$y_i = f(x_i)$	ST-1	ST-2	ST-3
0	8.0	2.079442	0.117783	-0.006433	0.000411
1	9.0	2.197225	0.108134	-0.005200	
2	9.5	2.251292	0.097735		
3	11.0	2.397895			

Polinom Newton dengan $x_0 = 8.0$ adalah:

$f(x) \approx p_3(x) =$ 2.079442 + 0.117783 (x-8.0) - 0.006433 (x - 8.0)(x - 9.0) + 0.000411 (x - 8.0)(x - 9.0) (x - 9.5)

Taksiran nilai fungsi pada x = 9.2 adalah:

$f(9.2) \approx p_3(9.2) =$ 2.079442 + 0.141340 – 0.001544 – 0.000030 = 2.219208

Sedangkan nilai sejatinya ln(9.2) = 2.219203 (7 angka signifikan). Jika dicari:

$p_1(9.2) = 2.220782$

$p_2(9.2) = 2.219238$

$p_3(9.2) = 2.219208$, dari sini bisa disimpulkan bahwa semakin tinggi orde polinom akan semakin teliti karena mempunyai galat yang sangat kecil.

Soal Investigasi 3. 2

Bentuklah polinom berderajat satu, dua, tiga dan empat yang menghampiri fungsi $f(x) = \cos(x)$ dalam selang [0.0, 4.0] dan jarak antar titik 1.0. lalu taksirlah nilai fungsi di x = 2.5 dengan polinom Newton derajat 3.

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$f(x)$	0.003	0.067	0.148	0.248	0.370	0.518	0.697

a. Berapa derajat polinom yang tepat melalui ketujuh titik tersebut?
b. Dari jawaban (a), tentukan nilai fungsi di x = 0.58 dengan polinom interpolasi Newton.

D. Galat Interpolasi Polinom

Polinom interpolasi $p_n(x)$ merupakan hampiran terhadap fungsi yang asli $f(x)$, sehingga $p_n(x)$ tidak sama dengan $f(x)$, meskipun pada titik-titik tertentu $p_n(x)$ dan $f(x)$ bersesuaian, yaitu $f(x_i) = p_n(x_i)$, i = 0, 1, 2, ... ,n. Oleh karena $p_n(x) \neq f(x)$ sehingga terdapat galat (selisih) diantara keduanya sebut saja $E(x)$, yaitu $E(x) = f(x) - p_n(x)$. Karena $f(x_i) = p_n(x_i)$, untuk i = 0, 1, 2, ... ,n, maka berlaku juga $E(x_i) = f(x_i) - p_n(x_i) = 0$. $E(x)$ dapat ditulis sebagai

$$E(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).....(x - x_n)R(x) \quad .....(3.18)$$

Atau

$E(x) = Q_{n+1}(x)R(x)$ .... (3.19), yang dalam hal ini

$Q_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)........(x-x_n)$ .... (3.20)

$R(x)$ adalah fungsi yang mencatat nilai selain $x_0, x_1, x_2, ...x_n$. Persamaan (3.18) dapat ditulis sebagai

$$f(x\ ) - p_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).....(x-x_n)R(x) = 0$$

misalkan didefinisikan fungsi W(t), sehingga

$$W(t) = f(t) - p_n(t) - (t-x_0)(t-x_1)....(t-x_n)R(x) = 0$$

.... (3.21)

$R(x)$ tidak ditulis sebagai $R(t)$, karena akan dicari nilai-nilai selain t.

Berdasarkan teorema Rolle yang berbunyi :

Misalkan fungsi f kontinu pada [a,b] dan f'(x) ada untuk semua a<x<b. jika f(a)=f(b)=0, maka terdapat nilai c, dengan a<c<b, sedemikian hingga f'(c)=0

Sehingga misalkan pada t=c adalah:

Jika w kontinu dan dapat diturunkan pada selang [a.b], maka

W'(t) = 0, W''(t) = 0, W'''(t) = 0,.... $W^{n+1} = 0$, sehingga jika digunakan pada (3.21) pada t = c adalah:

$$W^{n+1}(t) = 0 = f^{n+1}(c) - p_n(c) - Q_{n+1}{}^{n+1}(c)!R(x)$$

$$W^{n+1}(t) = 0 = f^{n+1}(c) - 0 - (n+1)!R(x)$$

.... (3.22)

Dari persamaan (3.22) diperoleh:

$$R(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!},\ x_0 < c < x_n \qquad ....(3.23)$$

Selanjutnya persamaan (3.23) disubstitusikan pada persamaan (3.19) sehingga:

$$E(x) = Q_{n+1}(x)\,\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \text{ atau}$$

$$E(x\ ) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).....(x-x_n)\,\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \;....... (3.24)$$

Jika fungsi f diketahui, dapat dicari turunannya di x = c untuk menghitung galat interpolasi. Tetapi nilai c tidak diketahui, yang jelas nilai c terletak antara x_0 dan x_n. Jika $[x_0, x_n]$ merupakan selang kecil sehingga f^{n+1} berubah lambat, maka kita dapat menghampiri $f^{n+1}(c)$ dengan $f^{n+1}(x_t)$, dimana x_t adalah titik tengah x_0 dan x_n, yaitu $x_t = \dfrac{x_0 + x_n}{2}$, sehingga :

$$E_R(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)....(x-x_n)\,\frac{f^{n+1}(x_t)}{(n+1)!} \;....$$

(3.25), disebut galat rata-rata interpolasi.

<u>Contoh 5:</u>

Diketahui tabel yang berisi pasangan titik (x,f(x)) dari fungsi f(x) = cos (x)

x_i	$f(x_i)$
0.0	1.0000000
1.0	0.5403023
2.0	-0.4161468
3.0	-0.9899925
4.0	-0.6536436

Hitung galat rata-rata interpolasi di titik x =0.5, x=1.5, x=2.5, bila x diinterpolasi dengan polinom Newton berderajat 3 bila $x_0 = 0$

Jawab:

Tabel selisih

I	x_i	$f(x_i)$	ST-1	ST-2	ST-3	ST-4
0	0.0	1.0000000	-0.4597			
1	1.0	0.5403023	-0.9564	-0.2484		
2	2.0	-0.4161468	-0.5739	0.1913	0.1466	-0.0147
3	3.0	-0.9899925	0.3363	0.4551	0.0880	
4	4.0	-0.6536436				

Polinom derajat 3 yang menginterpolasi f(x) = cos (x) dalam selang [0.0, 3.0] adalah:

$$\cos(x) \approx p_3(x) = 1.0000 - 0.4597(x-0.0) - 0.2485(x-0.0)(x-1.0) + 0.1466(x-0.0)(x-1.0)(x-2.0)$$

Titik tengah [0.0, 3.0] adalah $x_t = \dfrac{(0.0+3.0)}{2} = 1.5$

Galat rata-rata interpolasi:

$$E_3(x) = \frac{(x-0.0)(x-1.0)(x-2.0)(x-3.0)}{4!} f^{(4)}(x_t)$$

Turunan keempat dari fungsi $f(x) = \cos(x)$,

$f'(x) = -\sin(x)$, $f''(x) = -\cos(x)$, $f'''(x) = \sin(x)$, $f^{(4)}(x) = \cos(x)$

Sehingga:

$$E_3(x) = \frac{(x-0.0)(x-1.0)(x-2.0)(x-3.0)}{4!}(\cos(1.5))$$

Nilai-nilai interpolasi serta galat rata-rata interpolasi jika dibanding nilai sejati dan galat sejati diperlihatkan tabel berikut:

X	$f(x)$	$p_3(x)$	$E_3(x)$	Galat sejati
0.5	0.8775826	0.8872048	0.0027632	-0.0096222
1.5	0.0707372	0.0692120	-0.0016579	0.0015252
2.5	-0.8011436	-0.8058546	0.0027632	0.0047110

E. Taksiran Galat Interpolasi Newton

Perhatikan kembali Polinom Newton:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + (x-x_0)(x-x_1).......(x-x_{n-1})f[x_n, x_{n-1},......, x_1, x_0]$$

Suku $(x-x_0)(x-x_1)......(x-x_{n-1})f[x_n, x_{n-1},......, x_1, x_0]$ dinaikkan dari n sampai n+1. Sehingga ,

$$(x-x_0)(x-x_1).......(x-x_{n-1})(x-x_n)f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1},......, x_1, x_0]$$

bentuk ini bersesuaian dengan rumus galat interpolasi:

$$E(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).....(x-x_n)\frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}$$

Untuk: $\frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}$ dapat dihampiri nilainya dengan $f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1},...., x_1, x_0]$ asal terdapat titik tambahan x_{n+1}

Contoh 6:

Pada contoh 16, hitung taksiran galat interpolasi pada polinom berderajat 3 untuk menaksir nilai f(2.5)

Jawab:

Karena polinom berderajat 3, maka dari tabel selisih terbaginya:

$f[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0]$= -0.0147

Sehingga taksiran galat dalam menginterpolasi f(2.5) adalah:

E(2.5) = (2.5 – 0.0)(2.5 – 1.0)(2.5 – 2.0)(2.5 – 3.0)(-0.0147)
= 0.01378125

F. Polinom Newton-Gregory

Polinom Newton-Gregory merupakan kasus khusus dari polinomial Newton untuk titik-titik yang berjarak sama. Pada aplikasi nilai-nilai x berjarak sama, misal pada tabel nilai fungsi , atau pengukuran pada selang waktu yang teratur. Untuk titik-titik yang berjarak sama, rumus polinom Newton menjadi lebih sederhana, selain itu tabel selisih menjadi lebih mudah dibentuk. Disini kita menanamkan tabel tersebut sebagai tabel selisih. Ada dua macam **tabel selisih**, yaitu **tabel selisih maju** (*foward difference)* dan **tabel selisih mundur** (*backward difference*). Karena itu, ada dua macam polinom Newton-Gregory, yaitu polinom Newton-Gregory maju, dan polinom Newton-Gregory mundur.

1. Polinom Newton-Gregory Maju

Rumus polinom Newton-Gregory maju diturunkan dari tabel selisih maju, tetapi sebelumnya kita membahas table selisih maju.

Tabel Selisih Maju

Misalkan diberikan lima buah titik berjarak sama. Tabel selisih maju yang dibentuk dari kelima titik tersebut adalah:

Tabel 3.2 Tabel Selisih Maju

X	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
x_0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$
x_1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	
x_2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$		
x_3	f_3	Δf_3			
x_4	f_4				

Lambang Δ menyatakan selisih maju, keterangan untuk setiap simbol pada tabel diatas adalah:

$$f_0 = f(x_0) = y_o$$

$$f_1 = f(x_1) = y_1$$

....

$$f_p = f(x_p)$$

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$
$$\Delta f_1 = f_2 - f_1$$
...
$$\Delta f_p = f_{p+1} - f_p$$

$$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$$
$$\Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1$$
...
$$\Delta^2 f_p = \Delta f_{p+1} - \Delta f_p$$
...
$$\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$$
$$\Delta^3 f_1 = \Delta^2 f_2 - \Delta^2 f_1$$
...
$$\Delta^3 f_p = \Delta^2 f_{p+1} - \Delta^2 f_p$$

Sehingga bentuk umunya:

$$\Delta^{n+1} f_p = \Delta^n f_{p+1} - \Delta^n f_p \quad \text{..................... (3.26)}$$

<u>Penurunan Rumus Polinom Newton-Gregory Maju</u>

Rumus Polinom Newton-Gregory Maju didasarkan pada table selisih maju

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{\Delta f(x_0)}{h}$$

$$= \frac{\Delta f_0}{1!h}$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{\frac{\Delta f_1 - \Delta f_0}{h}}{2h}$$

$$= \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}$$

Bentuk umumnya:

$$f[x_n, \ldots\ldots, x_1, x_0] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n} = \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(3.27)

Sehingga polinom Newton untuk data yang berjarak sama adalah sebagai berikut:

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0] + \ldots\ldots +$$

$$(x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \ldots\ldots, x_1, x_0]$$

$$= f_0 + (x - x_0)\frac{\Delta f_0}{1!h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2} + \ldots.$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.28)$$

Titik yang berjarak sama dinyatakan sebagai:

$x_i = x_0 + ih$, i = 0, 1, 2, …,n, dan nilai x yang diinterpolasikan adalah:

$x = x_0 + sh$, $s \in R$

Jika persamaan (3.28) ditulis dalam parameter s adalah:

$$p_n(x) = f_0 + \frac{sh}{1!h}\Delta f_0 + \frac{s(s-1)h^2}{2!h^2}\Delta^2 f_0 + ... +$$

$$\frac{s(s-1)(s-2)...(s-n+1)h^n}{n!h^n}\Delta^n f_0$$

Sehingga menghasilkan

$$p_n(x) = f_0 + \frac{s}{1!}\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + ... + \frac{s(s-1)(s-2)...(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

… (3.29)

Pembentukan rumus Polinom Newton-Gregory Maju untuk titik yang berjarak sama adalah sebagai berikut:

$$p_0(x) = f_0$$

$$p_1(x) = p_0(x) + \frac{s}{1!}\Delta f_0$$

$$= f_0 + \frac{s}{1!}\Delta f_0$$

$$p_2(x) = p_1(x) + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0$$

$$= f_0 + \frac{s}{1!}\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0$$

$$p_3(x) = p_2(x) + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

$$= f_0 + \frac{s}{1!}\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

$$p_n(x) = f_0 + \frac{s}{1!}\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 +$$
$$\frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \ldots.$$
$$\frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (3.30)$$

<u>Contoh 18:</u>

Buat table selisih untuk fungsi f(x)=1/(x+1) pada selang [0.000, 0.625] dan h = 0.125. Hitung f(0.300) dengan polinom Newton-Gregory maju derajat 3.

Jawab:

X	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0.000	1.000	-0.111	0.022	-0.006
0.125	0.889	-0.089	0.016	-0.003
0.250	0.800	-0.073	0.013	-0.005
0,375	.272	-0.060	0.008	
0.500	0.667	-0.052		
0.625	0.615			

Untuk memperkirakan f(0.300) dengan polinom Newton-Gregory maju derajat 3, digunakan empat titik. galat interpolasi akan minimum jika x terletak di sekitar pertengahan selang. Sehingga titik-titik yang diambil adalah:

$x_0 = 0.125$, $x_1 = 0.250$, $x_2 = 0.375$, $x_3 = 0.500$, karena x = 0.300 terletak di sekitar pertengahan selang [0.125, 0.500], dan h = 0.125, maka nilai s adalah:

$$x = x_0 + sh$$

$$s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.300 - 0.125}{0.125} = 1.4$$

Sehingga nilai f(0.30) dengan polinom Newton-Gregory maju derajat 3:

$$p_3(x) = f_0 + \frac{s}{1!}\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

$$= 0.889 + (1.4)(-0.089) + \frac{(1.4)(0.4)}{2}(0.016) + \frac{(1.4)(0.4)(-0.6)}{6}(-0.003)$$

$$= 0.889 - 0.1246 + 0.0045$$

$$= 0.769$$

Jika dihitung nilai sejatinya f(0.300) adalah

F(0.300)=1/(0.300+1) = 0.769

Taksiran Galat interpolasi Newton-Gregory Maju

Seperti pada polinom Newton, galat interpolasi Newton Gregory juga dapat dihitung dengan menghampiri turunan fungsi ke-(n+1) dengan nilai pada tabel selisih. Perhatikan kembali polinom Newton-Gregory maju:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})\frac{\Delta^n f_0}{n!h^n},$$

Naikkan suku $(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_{n-1})\dfrac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$

Dari n menjadi (n+1):

$$(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_{n-1})(x-x_n)\frac{\Delta^{n+1} f_0}{n!h^{n+1}}$$

Bentuk ini bersesuaian dengan rumus galat interpolasi

$$E(x) = (x-x_0)(x-x_1)....(x-x_n)\frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}$$

$f^{n+1}(t)$ dapat dihampiri dengan:

$$f^{n+1}(t) \approx \frac{\Delta^{n+1} f_0}{h^{n+1}}$$

Sehingga taksiran galat dalam menginterpolasi f(x) dengan polinom Newton-Gregory Maju adalah:

$$E(x) = (x - x_0)(x - x_1)....(x - x_n)\frac{\Delta^{n+1} f_0}{h^{n+1}(n+1)!} \quad ... \ (3.31)$$

atau dalam bentuk lain:

$$E(x) = s(s-1)(s-2)...(s-n)\frac{\Delta^{n+1} f_0}{(n+1)!} .... \ (3.32)$$

dengan $s = \dfrac{(x - x_0)}{h}$

Contoh 19:

Hitung taksiran galat dalam menginterpolasi f(0.8) dengan formula interpolasi Newton-Gregory Maju derajat 2 dari fungsi f(x) = sin (x) di dalam selang [0.1, 1.7] dan h = 0.4.

Jawab:

Tabel Selisih Newton-Gregory Maju

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0.1	0.09983	0.37960	-0.07570	-0.04797
0.5	0.47943	0.30390	-0.12367	-0.02846
0.9	0.78333	0.18023	-0.152134	
1.3	0.96356	0.02810		
1.7	0.99166			

Dengan menggunakan titik tambahan x = 1.3, nilai $\Delta^{n+1} f_0$ dapat dihitung, yang mana pada tabel selisih telah diketahui yaitu -0.04797. sehingga taksiran galat dalam menginterpolasi f(0.8) adalah:

$$E(0.8) \approx \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0 = \frac{(1.75)(0.75)(-0.25)(-0.04797)}{3!}$$

$$= 2.62 \times 10^{-3}$$

Soal Investigasi 3. 3

Buat tabel selisih maju untuk fungsi $f(x)=\sqrt{x}$ pada selang [1.00, 1.06] h = 0.01, banyak angka signifikan = 5.

2. Polinom Newton-Gregory Mundur

Polinom Newton-Gregory Mundur (*Newton-Gregory backward)* didasarkan pada table selisih mundur. Titik-titik yang berjarak sama yaitu $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang dalam hal ini

$x_1 = x_0 + ih$, i = 0, -1, -2, …, -n

dan nilai x yang diinterpolasikan adalah:

$x = x_0 + sh$, $s \in R$

Sebagai contoh table selisih mundur diperlihatkan oleh table 3.3 sebagai berikut:

Table 3.3 Tabel Selisih Mundur

I	X	$f(x)$	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$
-3	x_{-3}	f_{-3}			
-2	x_{-2}	f_{-2}	∇f_{-2}		
-1	x_{-1}	f_{-1}	∇f_{-1}	$\nabla^2 f_{-1}$	
0	x_0	f_0	∇f_0	$\nabla^2 f_0$	$\nabla^3 f_0$

Keterangan:

$f_0 = f(x_0)$

$f_{-1} = f(x_{-1})$

$\nabla f_0 = f_0 - f_{-1}$

$\nabla f_{-1} = f_{-1} - f_{-2}$

$\nabla^2 f_0 = \nabla f_0 - \nabla f_{-1}$

$\nabla^{k+1} f_i = \nabla^k f_i - \nabla^k f_{i-1}$

Polinom Newton-Gregory Mundur didasarkan pada table selisih mundur. Penurunan rumus Polinom Newton-Gregory Mundur sama dengan peurunan rumus Polinom Newton-Gregory Maju, sehingga diperoleh rumus sebagai berikut:

$$f(x) \approx p_n(x) = f_0 + \frac{s}{1!}\nabla f_0 + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_0 + \ldots + \frac{s(s+1)(s+2)\ldots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f_0 \quad \ldots(3.33)$$

<u>Contoh 20:</u>

Diketahui 4 buah titik data dalam table berikut. Hitung f(1.72) dengan:

a. Polinom Newton-Gregory Maju derajat 3

b. Polinom Newton-Gregory Mundur derajat 3

Dengan ketelitian hingga 7 tempat desimal!

Jawab:

a. Polinom Newton-Gregory Maju derajat 3

I	X	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0	1.7	0.3979849	-0.0579985	-0.0001693	0.0004093
1	1.8	0.3399864	-0.0581678	0.0002400	
2	1.9	0.2818186	-0.0579278		
3	2.0	0.2238908			

$s = (x - x_0)/h = (1.72 - 1.7)/\ 0.1 = 0.2$

Perkiraan nilai f(1.72) adalah

$$f(1.72) \approx p_3(1.72) = 0.379849 + 0.2(-0.0579985) +$$

$$\frac{0.2(-0.8)}{2}(-0.0001693)$$

$$+\frac{0.2(-0.8)(-1.8)}{6}(0.0004093)$$

$= 0.3979849 - 0.0115997 + 0.0000135 + 0.0000196$

$= 0.3864183$

Nilai sejati f(1.72) = 0.3864185

Sehingga galat = 0.0000002

Tepat sampai 7 tampat desimal

b. Polinom Newton-Gregory Mundur derajat 3

	X	$f(x)$	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$
-3	1.7	0.3979849			
-2	1.8	0.3399864	-0.0579985		
-1	1.9	0.2818186	-0.0581678	-0.0001693	
0	2.0	0.2238908	-0.0579278	0.0002400	0.0004093

$s = (x - x_0)/h$ = (1.72 – 2.0)/ 0.1 = -2.8

Perkiraan nilai f(1.72) adalah

$f(1.72) \approx p_3(1.72)$

$$= 0.2238908 - 2.8(-0.0579278) + \frac{(-2.8)(-1.8)}{2}(0.0002400)$$

$$+ \frac{(-2.8)(-1.8)(-0.8)}{6}(0.0004093)$$

= 0.2238908 + 0.1621978 + 0.0006048 – 0.0002750

= 0.3864183

Dari hasil kedua polinom Newton-Gregory Maju dan polinom Newton-Gregory Mundur mempunyai hasil yang sama.

Soal Investigasi 3. 4

Uraikan cara memperoleh interpolasi polinom Newton-Gregory Mundur!

G. Lembar Investigasi

1. Bagi kelas menjadi lima kelompok heterogen baik dari jenis kelamin maupun kemampuannya.
2. Tiap kelompok mendapatkan satu soal investigasi secara random dari soal investigasi 3. 1 – 3. 4
3. Lakukan kegiatan investigasi seperti pada lembar investigasi berikut!

Lembar Investigasi
Interpolasi

Kelompok :
Anggota : 1.
2.
3.
4.
5.
6.

1. Tulis soal yang didapat!

....
....
....
....
....
....
....

2. Cari referensi / landasan teori mengenai soal tersebut dan tuliskan di bawah!

....
....
....
....
....
....

3. Kerjakan soal tersebut

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4. Tuliskan kesulitan yang didapat

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

5. Kesimpulan soal

....
....
....
....
....
....
....

Bab V
Integrasi Numerik

A. Persoalan Integrasi Numerik

Aplikasi integral sangat banyak digunakan dalam berbagai ilmu, sering dijumpai integrasi yang sullit atau tidak mempunyai penyelesaian secara analitik. Integrasi numerik merupakan integral tertentu yang didasarkan pada perhitungan perkiraan. Hitungan perkiraan tersebut dilakukan dengan mendekati fungsi yang diintegralkan dengan fungsi polynomial yang diperoleh berdasar data yang tersedia. Sehingga persoalan pada integrasi numerik ialah menghitung secara numerik integral tentu.

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Yang dalam hal ini a dan b batas-batas integrasi, f adalah fungsi yang diberikan. Pada bab ini akan dibahas dua pendekatan dalam menurunkan rumus integrasi numerik, pendekatan pertama, yaitu dengan berdasarkan tafsiran geometri integral tertentu, dan yang kedua berdasarkan polinom interpolasi.

B. Pendekatan Tafsiran Geometri Integral Tentu

Salah satu penurunan rumus integrasi numerik yaitu dengan berdasarkan pada pendekatan tafsiran geometri integral tentu. Daerah integrasi dibagi atas sejumlah pias yang berbentuk segi empat. Luas daerah integrasi dihampiri dengan luas seluruh pias. Integrasi numerik yang diturunkan dengan pendekatan ini digologkan ke dalam metode pias. Dihubungkan dengan tafsiran geometri integral tentu, titik-titik pada tabel sama dengan membagi selang integrasi [a,b] menjadi n buah pias. Lebar pias adalah:

$$h = \frac{b-a}{n} \text{ ..... (4.1),}$$

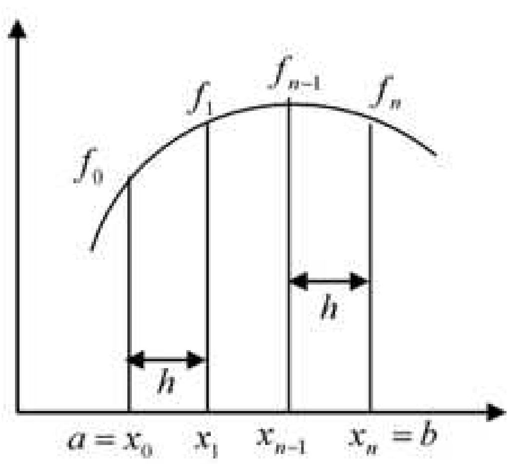
Titik absis pias dinyatakan sebagai:

$$x_r = a + rh, \text{ ………… (4.2),}$$

r = 0,1,2,...n, dan nilai fungsi pada titik absis pias adalah

$$f_r = f(x_r) \text{ ………… (4.3)}$$

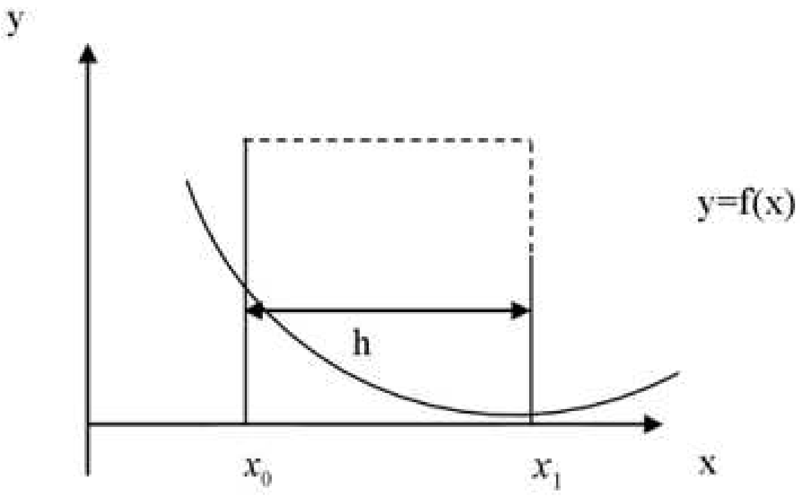
Luas daerah integrasi [a,b] dihampiri sebagai luas n buah pias. Metode integrasi numerik yang berbasis pias ini dinamakan metode pias. Kaidah integrasi numerik yang dapat diturunkan dengan metode pias pada bab ini adalah: Kaidah segiempat dan Kaidah trapesium



Gambar 4.1 Metode pias

1. Kaidah Segiempat

Pandang sebuah pias berbentuk empat persegi panjang dari $x = x_0$ sampai $x = x_1$ pada gambar berikut:



Gambar 4.2 Kaidah Segiempat

Luas satu pias adalah (tinggi pias = $f(x_0)$):

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx hf(x_0) \quad \text{.................. (4.4)}$$

atau (tinggi pias = $f(x_1)$) : $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx hf(x_1)$ .... (4.5)

sehingga

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx hf(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx hf(x_1) =$$

$$2\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx h[f(x_0) + f(x_1)] \quad \text{........ (4.6)}$$

Persamaan 4.6 dinamakan kaidah segiempat. Kaidah segiempat satu pias dapat diperluas untuk menghitung

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Yang mana I adalah luas daerah integrasi dalam selang [a,b]. Luas daerah tersebut adalah dengan membagi selang [a,b] dengan n buah pias segiempat dengan lebar h. Jumlah luas seluruh pias segiempat itu adalah hampiran luas I. Kaidah integrasi yang diperoleh adalah kaidah integrasi gabungan.

$$2\int_a^b f(x)dx \approx hf(x_0) + 2hf(x_1) + 2hf(x_2) + \dots\dots\dots\dots$$

$$+ 2hf(x_{n-1}) + hf(x_n)$$

Jika kedua ruas dibagi dua, maka:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} f(x_0) + hf(x_1) + hf(x_2) + \dots\dots\dots\dots$$

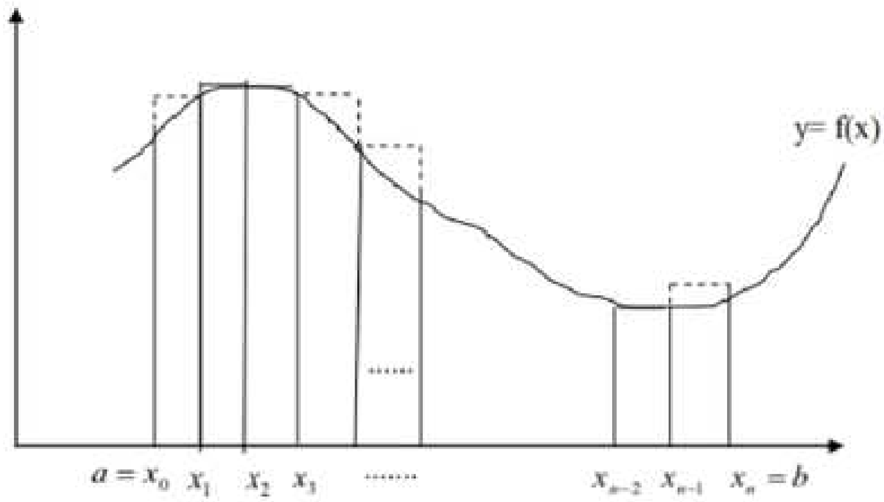
$$+ hf(x_{n-1}) + \frac{h}{2} f(x_n)$$

Jadi kaidah segiempat gabungan adalah

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots\dots$$

$$+ 2f_{n-1} + f_n) = \frac{h}{2}(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n) \qquad \dots\dots\dots(4.7)$$

Dengan $f_r = f(x_r)$, r = 0,1,2,....,n.



Gambar 4.3 Kaidah segiempat gabungan

2. Kaidah Trapesium

Pandang sebuah pias berbentuk trapesium dari $x = x_0$ sampai $x = x_1$. Luas trapesium adalah:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] \ldots\ldots. (4.8)$$

Persamaan (4.8) dikenal dengan nama kaidah trapesium. Kaidah trapesium sama dengan kaidah segiempat. Bila selang [a,b] dibagi atas n buah pias trapesium, kaidah integrasi yang diperoleh adalah kaidah trapesium gabungan

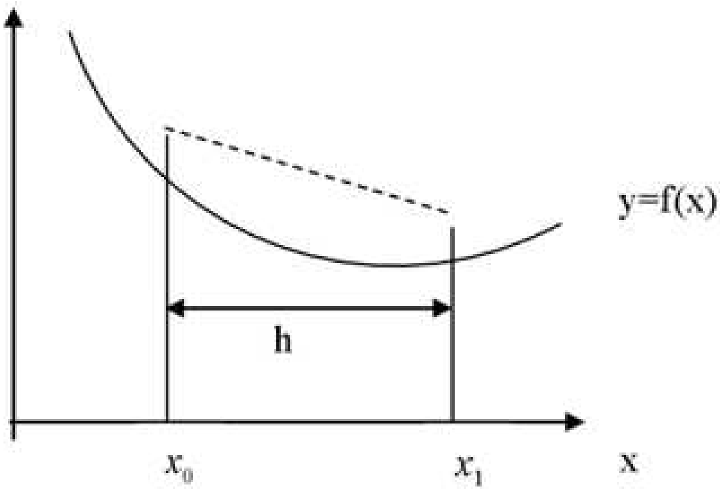
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots\ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \ldots. + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\approx \frac{h}{2}(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n) \ldots\ldots\ldots\ldots. (4.9)$$

Dengan $f_r = f(x_r)$, r = 0,1,2,...,n.



Gambar 4.4 Kaidah Trapesium

Contoh:

Hitung integral $\int_{1.8}^{3.4} e^x dx$ dengan kaidah trapesium. Ambil h = 0.2, gunakan 5 angka signifikan!

Jawab:

Jumlah pias: n = (b-a)/h = (3.4-1.8)/0.2 = 8

R	x_r	$f(x_r)$
0	1.8	6.050
1	2.0	7.389
2	2.2	9.025
3	24	11.023
4	2.6	13.464
5	2.8	16.445
6	3.0	20.086
7	3.2	24.533
8	3.4	29.964

Nilai integarsinya

$$\int_{1.8}^{3.4} e^x dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + ... + f_8)$$

$$\approx \frac{0.2}{2}[6.050 + 2(7.389) + 2(9.025) + ... + 2(16.445) +$$

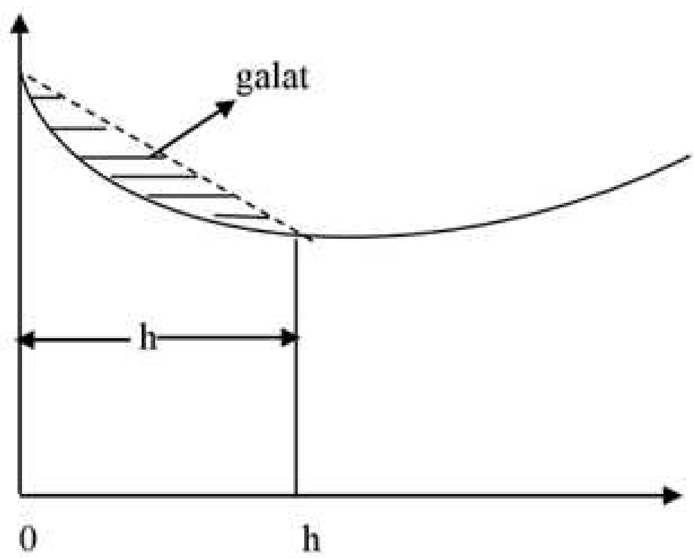
$$2(20.086) + 2(24.533) + 29.964]$$

$= 23.994$

Jadi nilai integrasinya adalah 23.994

Galat Metode Pias

Misalkan I adalah nilai integrasi sejati, dan I' adalah integrasi secara numerik. Maka galat hasil integrasi numerik didefinisikan sebagai E = $I - I'$. untuk penurunan galat, kita tinjau dalam selang [0,h], $I = \int_0^h f(x)dx$



Gambar 4.5 Galat Kaidah Trapesium (yang diarsir)

Galat untuk satu buah pias gambar 4.5 di atas adalah:

$$E = \int_0^h f(x)dx - \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

Uraikan f(x) ke dalam deret Taylor disekitar $x_0 = 0$

$$f(x) = f_0 + xf_0' + \frac{1}{2}x^2 f_0'' + \frac{1}{6}x^3 f_0''' + \ldots$$

Uraikan $f_1 = f(x_1) = f(h)$ ke dalam dereet Taylor di sekitar $x_0 = 0$

$$f_1 = f(x_1) = f(h) = f_0 + hf_0' + \frac{1}{2}h^2 f_0'' + \ldots$$

Maka,

$$E = \int_0^h [f_0 + xf_0' + \frac{1}{2}x^2 f_0'' + \frac{1}{6}x^2 f_0''' + \ldots]dx - \frac{h}{2}f_0 - \frac{h}{2}[f_0 +$$

$$hf_0' + \frac{1}{2}h^2 f_0'' + \ldots]$$

$$= xf_0 + \frac{1}{2}x^2 f_0 + \frac{1}{6}x^3 f_0''' + \ldots]_0^h - \frac{1}{2}hf_0 - \frac{1}{2}hf_0 - \frac{1}{2}h^2 f_0' - \frac{1}{4}h^3 f_0''' - \ldots$$

$$= (hf_0 + \frac{1}{2}h^2 f_0' + \frac{1}{6}h^3 f_0'' + \ldots) - (hf_0 + \frac{1}{2}h^2 f_0' + \frac{1}{4}h^3 f_0''' + \ldots)$$

$$= -\frac{1}{12}h^3 f_0'' + \ldots$$

$$= -\frac{1}{12}h^3 f_0''(t), \quad 0 < t < h \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.9)$$

Jadi

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{1}{12}h^3 f_0'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.10)$$

Untuk n buah pias, galat keseluruhan adalah:

$$E_{tot} = -\frac{1}{12}(f_0'' + f_1'' + f_2'' + \ldots + f_{n-1}'')$$

Yang dapat disederhanakan menjadi

$$E_{tot} \approx -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n-1} f_i''$$

$$\approx -n\frac{h^3}{12} f''(t), \quad a < t < b$$

Mengingat

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Maka,

$$E_{tot} \approx -n\frac{h^3}{12} f''(t)$$

$$\approx -n\frac{b-a}{n}\frac{h^2}{12} f''(t)$$

$$\approx -\frac{h^2}{12}(b-a) f''(t) \quad \text{..............................} \quad (4.11)$$

Sehingga :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n) + (-\frac{h^2}{12}(b-a) f''(t)$$

Jadi galat total integrasi dengan kaidah trapesium sebanding dengan kuadrat lebar pias (h). Semakin kecil ukuran h , semakin kecil galatnya, tapi semakin banyak komputasinya

Contoh 21:

Hitung integral $\int_{1.8}^{3.4} e^x dx$ dengan kaidah trapesium. Ambil h = 0.2. perkirakan batas galatnya. Gunakan 5 angka signifikan!

Jawab:

Jumlah n = (b-a)/h = (3.4 – 1.8)/0.2 = 8

Table data

r	x_r	$f(x_r)$
0	1.8	6.050
1	2.0	7.389
2	2.2	9.025
3	2.4	11.023
4	2.6	13.464
5	2.8	16.445
6	3.0	20.086
7	3.2	24.533
8	3.4	29.964

Nilai integrasinya

$$\int_{1.8}^{3.4} e^x dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \ldots + 2f_7 + f_8)$$

$$\approx \frac{0.2}{2}[6.050 + 2(7.389) + 2(9.025) + \ldots + 2(16.445) + 2(24.533) + 29.964]$$

$$\approx 23.994$$

Nilai integrasinya sejatinya adalah

$$\int_{1.8}^{3.4} e^x dx \Big|_{x=1.8}^{x=3.4} = e^{3.4} - e^{1.8} = 29.964 - 6.050 = 23.914$$

Galat kaidah trapesium

$$E = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(t), \quad 1.8 < t < 3.4$$

Karena $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$ dan $f''(x) = e^x$, maka

$$E = -\frac{1}{12}(0.2)^2(3.4 - 1.8)e^x, \; 1.8 < t < 3.4$$

Sehingga batas-batas galatnya

$$E = -\frac{1}{12}(0.2)^2(3.4-1.8).\begin{Bmatrix} e^{1.8}(\min) = -0.0323(\min) \\ e^{3.4}(mak) = -0.1598(mak) \end{Bmatrix}$$

Atau

-0.0323 < E < -0.1598

Ini berarti nilai sejati harus terletak antara 23.994 – 0.1598 = 23.834 dan 23.994 – 0.0323 = 23.962

Galat hasil integrasi adalah: 23.914 – 23.994 = - 0.080

Metode Newton – Cotes

Metode Newton – Cotes adalah metode yang umum untuk menurunkan kaidah integrasi numerik. Polinom Interpolasi menjadi dasar dari metode Newton – Cotes ini. Gagasannya adalah menghampiri fungsi f(x) dengan interpolasi Pn(x).

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b Pn(x)dx$$

yang mana :

$$Pn(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Polinom interpolasi yang kita pakai pada bab ini adalah polinom interpolasi Newton Gregory maju :

$$Pn(x) = fo + (x - x0)\frac{\Delta f0}{1!h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f0}{2!h^2} + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_{n-1})\frac{\Delta^n f0}{n!h^n}$$

kaidah integrasi numerik yang diturunkan dari metode Newton-Catos adalah :

1. kaidah Trapesium
2. kaidah Simpson $^1/_3$
3. kaidah Simpson $^3/_8$

1) Kaidah Trapesium

Diberikan 2 buah titik data (0,f(0)) dan (h,f(h)). Polinom interpolasi yang melalui kedua buah titik itu adalah sebuah garis lurus. Luas daerah yang dihitung sebagai hampiran nilai integrasi adalah daerah dibawah garis lurus tersebut :

Gb 1. Kaidah Trapesium

Polinom Interpolasi Newton – Gregory derajat 1 yang melalui kedua titik itu adalah :

$$P_1(x) = f(x_0) + x\frac{\Delta f(x_0)}{h}$$
$$= f_0 + x\frac{\Delta f_0}{h}$$

Integrasikan $P_1(x)$ dalam selang [0,h]

$$I = \int_0^h f(x)dx \approx \int_0^h p_1(x)dx$$
$$\approx \int_0^h \left(f_0 + x\frac{\Delta f_0}{h}\right)dx$$
$$\approx xf_0 + \frac{x^2}{2h}\Delta f_0]_0^h$$
$$\approx hf_0 + \frac{h}{2}\Delta f_0$$
$$\approx hf_0 + \frac{h}{2}(f_1 - f_0)$$
$$\approx \frac{h}{2}f_0 + \frac{h}{2}f_1$$
$$\approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

Jadi kaidah trapesium :

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

Galat kaidah Trapesium sudah kita turunkan sebelumnya pada metode pias,

yaitu $E = -\frac{1}{12}h^3 f''(t)$ $\qquad 0 < t < h$

Jadi : $\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + (-\frac{1}{12}h^3 f''(t)$

Kaidah Trapesium untuk Integrasi dalam selang [0,h] kita perluas untuk menghitung

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Yang dalam hal ini, I sama dengan luas daerah integrasi di dalam selang [a,b]. Luas daerah tersebut diperoleh dengan membagi selang [a,b] menjadi n buah upselang (subinterval) dengan lebar tiap upselang diinterpolasi dengan polinom derajat 1. Jadi di dalam selang [a,b] terdapat n buah polinom derajat 1 yang terpotong – potong. Integrasi masing – masing polinom itu menghasilkan n buah kaidah trapesium yang disebut kaidah trapesium gabungan. Luas daerah integrasi pada [a,b] adalah jumlah seluruh luas trapesium.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \cdots + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n)$$

$$\approx \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n)$$

$$\approx \frac{h}{2}(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n)$$

Galat total sudah kita peroleh pada metode pias, yaitu :

$$E_{tot} \approx -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(t),\ x_0 < t < x_n$$

2) Kaidah Simpson $^1/_3$

Hampiran nilai integrasi akan lebih baik jika ditingkatkan dengan menggunakan polinom interpolasi berderajat yang lebih tinggi. Misal fg (x) dihampiri dengan polinom interpolasi derajat 2. Luas daerah yang dihitung sebagai hampiran integrasi adalah daerah dibawah parabol, sehingga kita butuhkan 3 titik. Misal :

(0,f(0)), (h,f(h)), (2h,f(2h))

Polinom Interpolasi Newton Gregory derajat 2 yang melalui harga titik tersebut adalah :

$$P_2(x) = f(x_0) + \frac{x}{h}\Delta f(x_0) + \frac{x(x-h)}{2!\,h^2}\Delta^2 f(x_0)$$

$$= f_0 + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f_0$$

Kita integrasikan $P_2(x)$ dalam selang [0,2h]

$$I \approx \int_0^{2h} f(x)dx \approx \int_0^{2h} p_2(x)dx$$

$$\approx \int_0^{2h}(f_0 + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f_0)dx$$

$$\approx f_0 x + \frac{1}{2h}x^2\Delta f_0 + (\frac{x^3}{6h^2} - \frac{x^2}{4h})\Delta^2 f_0 \;]_0^{2h}$$

$$\approx 2hf_0 + \frac{4h^2}{2h}\Delta f_0 + (\frac{8h^3}{6h^2} - \frac{4h^2}{4h})\Delta^2 f_0$$

$$\approx 2hf_0 + 2h\Delta f_0 + (\frac{4h}{3} - h)\Delta^2 f_0$$

$$\approx 2hf_0 + 2h\Delta f_0 + \frac{h}{3}\Delta^2 f_0$$

Ingat :

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

Dan

$$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0) = f_2 - 2f_1 + f_0$$

Selanjutnya :

$$I \approx 2hf_0 + 2h(f_1 - f_0) + \frac{h}{3}(f_2 - 2f_1 + f_0)$$

$$\approx 2hf_0 + 2hf_1 - 2hf_0 + \frac{h}{3}f_2 - \frac{2h}{3}f_1 + \frac{h}{3}f_0$$

$$\approx \frac{h}{3}f_0 + \frac{4h}{3}f_1 + \frac{h}{3}f_2$$

$$\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \ldots\ldots\ldots.(2.1)$$

Persamaan (2.1) dinamakan kaidah Simpson 1/3. Misalkan kurva fungsi sepanjang selang [a,b] kita bagi menjadi n+1 buah titik $x_{0,}x_1, \ldots\ldots\ldots.x_n$, dengan n genap, setiap 3 buah titik (2 pasang upselang) di kurva dihampiri dengan parabol (polinom interpolasi derajat 2). Bila masing – masing polinom derajat 2 kita integralkan didalam upselang Integrasinya, maka jumlah seluruh Integral tersebut akan membentuk kaidah Simpson 1/3 gabungan :

$$I_{tot} = \int_a^b f(x)dx$$

$$\approx \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \cdots + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

$$\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

$$\approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f_i + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f_i + f_n\right) \ldots\ldots (2.2)$$

Penggunaan kaidah 1/3 simpson mensyaratkan jumlah upselang (n) harus genap.

Galat kaidah Simpson 1/3

Galat kaidah Simpson 1/3 untuk 2 pasang upselang :

$$E = \int_0^{2h} f(x)dx - \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \ldots\ldots (2.3)$$

Uraikan $f(x), f_1, f_2$ masing-masing ke dalam deret Taylor disekitar $x_0 = 0$

$$f(x) = f_0 + xf_0' + \frac{x^2}{2}f_0'' + \frac{x^3}{6}f_0'' + \frac{x^4}{24}f_0^{iv} + \ldots\ldots (2.4)$$

$$f_1 = f(h) = f_0 + \; hf_0' + \frac{h^2}{2} f_0'' + \frac{h^3}{6} f_0'' + \cdots (2.5)$$

$$f_2 = f(2h) = f_0 + 2hf_0' + \frac{4h^2}{2} f_0'' + \frac{8h^3}{6} f_0'' + \; \ldots . (2.6)$$

Subtitusi (2.4), (2.5), (2.6), ke (2.3)

E = $\int_0^{2h} \left(f_0 + xf_0' + \frac{x^2}{2} f_0'' + \frac{x^3}{6} f_0''' + \cdots \right) dx - \frac{h}{3} \{ (f_0 +$ $4f_0 + 4hf_0' + \frac{4h^2}{2} f_0'' + \cdots) + (f_0 + 2hf_0' +$

$$\frac{4h^2}{2} f_0'' + \frac{8h^3}{6} f_0'' + \frac{16h^4}{24} f_0^{iv} + \cdots)\}$$

$= \left(xf_0 + \frac{x^2}{2} f_0' + \frac{x^3}{6} f_0'' + \frac{x^4}{24} f_0'' + \cdots \right)]_0^{2h} - \frac{h}{3} (6f_0 +$ $6hf_0' + 4h^2 f_0'' + 2h^3 f_0'' + \cdots)$

$= \left(2hf_0 + 2h^2 f_0' + \frac{4h^3}{3} f_0'' + \frac{2h^4}{3} f_0''' + \cdots \right) - (2hf_0 +$ $2h^2 f_0' + \frac{4h^3}{3} f_0'' + \cdots)$

$= \frac{32h^5}{120} f_0^{iv} - \frac{20h^5}{72} f_0^{iv} + \cdots$

$= -\frac{1}{90} h^5 f_0^{iv}$ ... ... (2.7)

Sehingga kaidah Simpson 1/3 untuk sepasang upselang ditambah dengan galatnya :

$\int_0^{2h} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) -$ $\frac{1}{90} h^5 f_0^{iv}$ ... ... (2.8)

Galat untuk n/2 pasang upselang :

$$E_{tot} = -\frac{1}{90} h^5 (f_0^{iv} + f_2^{iv} + f_4^{iv} + \cdots + f_{n-2}^{iv})$$

$= -\frac{1}{90} h^5 \sum_{i=0,2,\ldots}^{n-2} f_i^{iv}$

$= -\frac{h^5}{90} . \frac{n}{2} . f^{iv}(t), mengingat \; n = \; \frac{b-g}{h}$

$= \frac{h^4}{180} (b-a) f^{iv}(t)$ ... ... (2.9)

3) Kaidah Simpson 3/8

Seperti halnya pada kaidah Simpson 1/3, hampiran nilai integrasi yang lebih teliti dapat ditingkatkan terus dengan menggunakan polinom interpolasi derajat yang lebih tinggi pula. Misalkan fg (x) kita hampiri dengan polinom interpolasi derajat 3. Luas daerah yang dihitung sebagai hampiran nilai Integrasi adalah daerah dibawah kurva polinom derajat 3. Untuk membentuk polinom Interpolasi derajat 3, dibutuhkan 4 titik, misalkan titik – titik tersebut :(0,f(0)), (h.f(h)), (2h,f(2h)), (3h,f(3h)).

Polinom Interpolasi Newton –Gregory derajat 3, yang melalui ke-4 buah titik :

$$P_3(x) = f(x_0) + \frac{x}{h}\Delta f(x_0) + \frac{x(x-h)}{2!\,h^2}\Delta^2 f(x_0) + \frac{x(x-h)(x-2h)}{3!\,h^3}\Delta^3 f(x_0)$$

$$= f_0 + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f_0 + \frac{x(x-h)(x-2h)}{31h^3}\Delta^3 f_0$$

Integrasi $P_3(x)$ dalam selang [0,3h] adalah :

$$I \approx \int_0^{3h} f(x)dx \approx \int_0^{3h} P_3(x)dx$$

$$I \approx \int_0^{3h} [f_0 + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!\,h^2}\Delta^2 f_0 + \frac{x(x-h)(x-2h)}{3!\,h^3}\Delta^3 f_0]dx$$

Dengan cara penurunan yang sama dengan kaidah Simpson 1/3, diperoleh :

$$\int_0^{3h} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \ldots\ldots\ldots\ldots (2.10)$$

Merupakan kaidah Simpson 3/8 gabungan

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$\approx \frac{3h}{8}[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 2f_6 + 3f_7 + 3f_8 + 2f_9 + \cdots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n)$$

$$\approx \frac{3h}{8}(f_0 + 3\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 3,6,9}}^{n-1} f_i + 2\sum_{i=3,6,9,\dots}^{n-3} f_i + f_n)$$

Namun kaidah Simpson 3/8 mensyaratkan jumlah upselang (n) harus kelipatan 3.

Galat kaidah 3/8 Simpson gabungan :

$$E_{tot} \approx \sum_{i=1}^{n-3} \frac{(-3h^5)}{80} f^{iv}(t)$$

$$\approx -\frac{3h^5}{80}\sum_{i=1}^{n-3} f^{iv}(t)$$

$$\approx -\frac{3h^5}{80}.\frac{n}{3}.f^{iv}(t)$$

$$\approx -\frac{h^5}{80}\frac{(b-a)}{h}.f^{iv}(t)$$

$$\approx -\frac{(b-a)h^4}{80}f^{iv}(t), \quad a < t < b \dots\dots (2.11)$$

Kaidah Simpson 3/8 memiliki orde galat yang sama dengan orde galat kaidah Simpson 1/3 biasanya lebih banyak dipakai karena dengan tiga titik (Simpson 1/3) sudah diperoleh orde ketelitian yang sama dengan 4 titik (Simpson 3/8). Tapi untuk n kelipatan tiga, bisa kita gunakan Simpson 3/8 bukan 1/3.

C. Lembar Investigasi

1. Bagi kelas menjadi lima kelompok heterogen baik dari jenis kelamin maupun kemampuannya.
2. Tiap kelompok mendapatkan satu soal investigasi secara random dari soal investigasi 4.1 – 4.
3. Lakukan kegiatan investigasi seperti pada lembar investigasi berikut!

Lembar Investigasi
Integrasi Numerik

Kelompok :
Anggota : 1.
2.
3.
4.
5.
6.

1. Tulis soal yang didapat!

....
....
....
....
....
....
....

2. Cari referensi / landasan teori mengenai soal tersebut dan tuliskan di bawah!

....
....
....
....
....
....

3. Kerjakan soal tersebut

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4. Tuliskan kesulitan yang didapat

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

5. Kesimpulan soal

....
....
....
....
....
....
....

Daftar Pustaka

Atkinson, K., 1989, An Introduction to Numerical Analysis, Second Edition, John Wiley adn Sons, Inc., New York.

Atkinson, K., Han, W. and Stewart, D., 2009, Numerical Solution of Ordinary Differential Equations, John Wiley and Sons, Inc., New Jersey.

Basuki, Achmad dan Ramadijanti, Nana. 2004. Metode Numerik dan Algoritma Komputasi. Yogyakarta: Andi.

Burden, R.L. and Faires, J.D., 2010, Numerical Analysis, Ninth Edition, Brooks/ Cole, Boston.

Chapra, Steven C. Canale, Raymond. P. 1991. Metode Numerik untuk Teknik dengan Penerapan pada Komputer Pribadi. Jakarta: Universitas Indonesia.

Griffiths, D.F. ans Higham, D.J., 2010, Numerical Methods for Ordinary Differential Equations: Initial Value Problem, Springer, New York.

Munif, Abdul dan Hidayatullah, Prastyoko Aries. 2003. Cara Praktis Penguasaan dan Penggunaan Metode Numerik. Surabaya: Prima Printing.

Munir, Rinaldi. 2006. Metode Numerik. Bandung: Informatika

Ripai. 2012. Pengantar Analisis dan Komputasi Metode Numerik. Mataram: IAIN Mataram.

Setiawan, Agus. 2006. Pengantar Metode Numerik. Yogyakarta: Andi.

Susatio, Yerri. 2005. Metode Numerik Berbasis Mathcad. Yogyakarta: Andi

Penulis

Swasti Maharani, lahir di Ngawi pada 10 Juni 1989. Kesehariannya Swasti mengajar di program studi S1 Pendidikan Matematika di Universitas PGRI Madiun. Lulusan Magister Pendidikan Matematika Universitas Sebelas Maret tahun 2013 ini memulai studi doktoral pendidikan matematika di Pascasarjana Universitas Negeri Malang sejak tahun 2017. Mata kuliah yang diampunya adalah Metode Numerik, Aljabar Linear, dan Trigonometri. Selain menjadi dosen, Swasti adalah salah satu editor di JIPM (Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika) dan aktif sebagai tutor Relawan Jurnal Indonesia. Selain itu, ia juga menjadi reviewer di beberapa jurnal nasional terakreditasi di Indonesia khususnya bidang Pendidikan Matematika.

Edy Suprapto, dilahirkan di Madiun pada tanggal 22 Oktober 1981. Memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.) pada Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Brawijaya (UNIBRAW) Malang pada tahun 2004. Selanjutnya menyelesaikana gelar Magister Pendidikan (M.Pd.) pada Program Pascasarjana Universitas Sebelas Maret (UNS) Surakarta, Jurusan Pendidikan Matematika pada tahun 2012. Pekerjaan, sebagai dosen di UNIVERSITAS PGRI MADIUN (UNIPMA) sejak 2009 sampai sekarang. Beberapa jabatan dan aktivitas yang dijalani saat ini diantaranya sebagai Sekretaris Program Studi Pendidikan Matematika, *Editor in Chief* pada Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika (JIPM), dan Reviewer Program Kreativitas Mahasiswa (PKM) di tingkat universitas maupun nasional. Adapun mata kuliah yang pernah diampu diantaranya: Trigonometri, Analisis Vektor, Kalkulus dan Matematika Ekonomi.

ANALISIS NUMERIK

BERBASIS GROUP INVESTIGATION UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN BERPIKIR KRITIS

Kehadiran buku ini akan melengkapi pengetahuan pembaca tentang metode numerik yang merupakan alat bantu pemecahan permasalahan matematika yang sangat ampuh. Metode numerik mampu menangani sistem persamaan besar, ketidaklinieran, dan geometri yang rumit yang dalam praktek rekayasa seringkali tidak mungkin dipecahkan secara analitik. Selain itu, metode numerik menyediakan sarana untuk memperkuat kembali pemahaman matematika. Buku ini selain menjabarkan pengetahuan tentang numerik, juga dilengkapi dengan lembar gorup investigasi yang diranang untuk meningkatkan kemampuan berpikir kritis.

Secara sistematis buku ini membahas: 1) kekeliruan dalam perhitungan numerik, 2) solusi persamaan tak linier, 3) solusi sistem persamaan linier, 4) interpolasi, dan 5) integrasi numerik.

AE MEDIA GRAFIKA

CV. AE MEDIA GRAFIKA

aemediagrafika@gmail.com aemediagrafika

http://aemediagrafika.co.id 082336759777

ISBN 978-602-6637-07-9

9786026637079

Buku Analisis Numerik

ORIGINALITY REPORT

14%	12%	7%	2%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

MATCH ALL SOURCES (ONLY SELECTED SOURCE PRINTED)

3%

★ www.realmic.net

Internet Source

Exclude quotes	On	Exclude matches	< 15 words
Exclude bibliography	On		